ch II $\boxed{\text{Systèmes de particules en interaction}}$

objectif : calcul de $\mathbb{E}(f_n(X_{0:n}))$ où $X_{0:n} = (X_0, X_1, \dots, X_n)$

avec $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ chaîne de Markov à valeurs dans E.

si $\mathbb{P}(f_n(X_{0:n}) \neq 0) << 1$ (evts rares) pb de variance dans la méthode de Monte Carlo standard.

échantillonnage préférentiel : $\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}} \propto \prod_{p=0}^{n-1} g_p(X_{0:p})$ avec

les $g_p : E^n \to]0,+\infty[$ bornées. $\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}} = \frac{\prod_{p=0}^{n-1} g_p(X_{0:p})}{\mathbb{E}\left(\prod_{p=0}^{n-1} g_p(X_{0:p})\right)}$

$$\mathbb{E}(f_n(X_{0:n})) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}\left(\tilde{f}_n(X_{0:n})\right) \mathbb{E}\left(\prod_{p=0}^{n-1} g_p(X_{0:p})\right)$$

avec $\tilde{f}_n(x_{0:n}) = \frac{f_n(x_{0:n})}{\prod_{p=0}^{n-1} g_p(x_{0:p})}$

ex : si $f_n(x_{0:n}) = \Psi(x_n)$ avec $E = \mathbb{R}$ et Ψ non nulle seul^t pour les grandes valeurs de x_n

on peut choisir $g_p(x_{0:p})$ fonction de x_p seul^t ou de $x_p - x_{p-1}$ croissante de façon à privilégier les trajectoires déjà hautes à l'instant p ou qui $\nearrow$ entre $p-1$ et p.

mise en œuvre :
- $\rightarrow$ savoir simuler suivant Q_n
- $\rightarrow$ savoir calculer $\mathbb{E}\left(\prod_{p=0}^{n-1} g_p(X_{0:p})\right)$

Suite de mesures : $\gamma_0 = \eta_0$ loi de X_0

γ_p mesure ≥ 0 sur E^{p+1} définie par $\forall\, h_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée

$$\gamma_p(h_p) = \mathbb{E}\left(h_p(X_{0:p}) \prod_{\ell=0}^{p-1} g_\ell(X_{0:\ell})\right)$$

η_p proba sur E^{p+1} obtenue par normalisation $\eta_p(h_p) = \dfrac{\gamma_p(h_p)}{\gamma_p(1)}$.

Alors $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}(h_n(X_{0:n})) = \eta_n(h_n)$ ie la loi de $X_{0:n}$ sous $\mathbb{Q}_n$ est η_n.

On a $\gamma_p(1) = \mathbb{E}\left(\prod_{\ell=0}^{p-1} g_\ell(X_{0:\ell})\right) = \mathbb{E}\left(g_{p-1}(X_{0:p-1}) \prod_{\ell=0}^{p-2} g_\ell(X_{0:\ell})\right)$

$$= \gamma_{p-1}(g_{p-1}) = \eta_{p-1}(g_{p-1})\, \gamma_{p-1}(1)$$

Par récurrence, comme $\gamma_0(1) = \eta_0(1) = 1$,

$$\boxed{\gamma_p(1) = \prod_{\ell=0}^{p-1} \eta_\ell(g_\ell)}.$$

$$\mathbb{E}(f_n(X_{0:n})) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}(\tilde{f}_n(X_{0:n}))\, \underbrace{\mathbb{E}\left(\prod_{p=0}^{n-1} g_p(X_{0:p})\right)}_{\gamma_p(1)} = \eta_n(\tilde{f}_n) \prod_{\ell=0}^{n-1} \eta_\ell(g_\ell)$$

Plus g^{alt}

$$\boxed{\gamma_p(h_p) = \eta_p(h_p)\, \gamma_p(1) = \eta_p(h_p) \prod_{\ell=0}^{p-1} \eta_\ell(g_\ell)}$$

Méthode particulaire : construire des approximations $\eta_\ell^M = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \delta_{X_{0:\ell}^{\ell,m}}$ des η_ℓ

<u>Filtrage</u> : On s'intéresse à un signal qui est une chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (<u>ex</u> : position d'un aéronef dans le ciel).

On n'observe pas X_k mais $Y_k = \varphi_k(X_k) + V_k$ où $\varphi_k : E \to \mathbb{R}^d$ et les bruits $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont supposés indep de $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et iid $\sim q(v)\,dv$.

Sachant $X_{0:p+1} = x_{0:p+1}$, $Y_{0:p}$ possède la densité

$$\prod_{k=0}^{p} q\left(y_k - \varphi_k(x_k)\right).$$

Bayes $\to$ $\mathbb{P}(X_{0:p+1} \in dx_{0:p+1} \mid Y_{0:p} = y_{0:p}) \propto \left[\prod_{k=0}^{p} q\left(y_k - \varphi_k(x_k)\right)\right] \mathbb{P}(X_{0:p+1} \in dx_{0:p+1})$

cette loi condit est η_{p+1} si pour tout k $g_k(x_{0:k}) = q(y_k - \varphi_k(x_k))$

loi condit de $X_{0:p}$ sachant $Y_{0:p} = y_{0:p}$, $\longrightarrow$ $\hat{\eta}_p$ définie par

$$\hat{\eta}_p(h_p) = \frac{\gamma_p(h_p g_p)}{\gamma_p(g_p)} = \frac{\eta_p(h_p g_p)}{\eta_p(g_p)}$$

Construction de la suite d'approximations

$$\boxed{\eta_p^M = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \delta_{X_{0:p}^{p,m}}}$$

- initialisation $\left(X_0^{0,m}\right)_{1\leq m\leq M}$ iid $\sim \eta_0 = \gamma_0$

- évolution récurrente : passage de η_p^M à η_{p+1}^M pour $p\geq 0$

- sélection : sachant $\mathcal{F}_p = \sigma\left(\left(X_{0:\ell}^{\ell,m}\right)_{\substack{1\leq m\leq M\\ 0\leq \ell\leq p}}\right)$ on génère des $X_{0:p}^{p+1,m}$ condit indep et tq

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\delta_{X_{0:p}^{p+1,m}} \,\Big|\, \mathcal{F}_p\right) = \frac{1}{M\eta_p^M(g_p)}\sum_{m=1}^{M} g_p\left(X_{0:p}^{p,m}\right)\delta_{X_{0:p}^{p,m}}$$

NB : $\hat{\eta}_p^M = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\delta_{X_{0:p}^{p+1,m}}$ est une approximation de $\hat{\eta}_p$.

- mutation : sachant $\mathcal{G}_{p+1} = \sigma\left(\left(X_{0:\ell}^{\ell,m}\right)_{\substack{1\leq m\leq M\\ 0\leq \ell\leq p}}, \left(X_{0:p}^{p+1,m}\right)_{1\leq m\leq M}\right)$

on génère $X_{p+1}^{p+1,m}$ condit indep et distribuées $\sim P_{p+1}\left(X_p^{p+1,m}, \cdot\right)$

noyau de la chaîne de Markov pour passer de p à $p+1$

On pose $X_{0:p+1}^{p+1,m} = \left(X_{0:p}^{p+1,m}, X_{p+1}^{p+1,m}\right)$

méthodes de sélection :

Sur un espace $\mathcal{Y}_M$ on veut générer $(Y_m)_{1\leq m\leq M}$ indep

tq $\mathbb{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\delta_{Y_m}\right) = \sum_{l=1}^{M} p^l \delta_{y^l}$ où les $p^l \in [0,1]$ vérifient $\sum_{l=1}^{M} p_l = 1$

ie $\forall f : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ mes bornée $\mathbb{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f(Y_m)\right) = \sum_{l=1}^{M} p^l f(y^l)$

- échantillonnage multinomial :

on génère les Y_m iid $\sim \sum_{l=1}^{M} p^l \delta_{y^l}$

alors $\forall m$, $\mathbb{E}(f(Y_m)) = \sum_{l=1}^{M} p^l f(y^l)$

- échantillonnage résiduel :

Pour $x\in\mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ l'entier tq $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

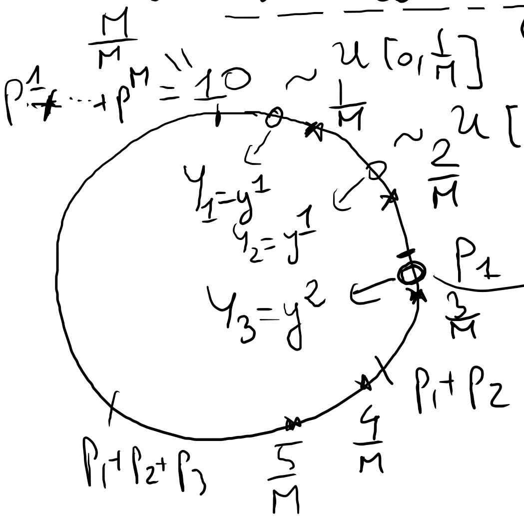
et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Pour $1\leq l \leq M$ et $\sum_{j=1}^{l-1}\lfloor Mp^j\rfloor < m \leq \sum_{j=1}^{l}\lfloor Mp^j \rfloor$, on pose $Y_m = y^l$

ie on replique cette valeur $\lfloor Mp^l \rfloor$ fois

Si $r = \underbrace{M}_{\sum_{j=1}^{M} Mp^j} - \sum_{j=1}^{M}\lfloor Mp^j\rfloor = \sum_{j=1}^{M}\{Mp^j\} \geq 1$, alors on génère les Y_m pour $M-r+1\leq m\leq M$ iid $\sim \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{M}\{Mp^l\}\delta_{y^l}$

• échantillonnage stratifié :



$(U_m)_{1\le m\le M}$ iid $\sim \mathcal{U}[0,1]$

Les $\left(\frac{m-U_m}{M}\right)_{1\le m\le M}$ sont indép et resp $\sim \mathcal{U}\left[\frac{m-1}{M},\frac{m}{M}\right]$

$$\boxed{(*)\; Y_m = \sum_{l=1}^{M} y^l\, \mathbb{1}_{\left\{p_1+\dots+p_{l-1} < \frac{m-U_m}{M} \le p_1+\dots+p_l\right\}}}$$

• échantillonnage systématique : choisir $\forall m,\ U_m = U \sim \mathcal{U}[0,1]$

dans (*)

⚠ comme un seul tirage uniforme, on perd l'indépendance !

Alors y^l est répliqué $\lfloor M(p_1+\dots+p_l)+U\rfloor - \lfloor M(p_1+\dots+p_{l-1})+U\rfloor$ fois

Dans l'étape de sélection $Y^l = X^{p,l}_{0:p}$

et $p^l = \dfrac{g_p(X^{p,l}_{0:p})}{\sum_{m=1}^{M} g_p(X^{p,m}_{0:p})}$

Approximation des mesures γ_p non normalisées :

Comme $\gamma_p(h_p) = \eta_p(h_p) \prod_{\ell=0}^{p-1} \eta_\ell(g_\ell)$, on pose

$$\boxed{\gamma_p^M(h_p) = \eta_p^M(h_p) \prod_{\ell=0}^{p-1} \eta_\ell^M(g_\ell)}$$

__Proposition__ : On suppose que $\forall p \in \{0, \dots, n-1\}$, $g_p : E^{p+1} \to]0,+\infty[$ est mesurable bornée. Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$ et toute fonction $h_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée

$$\mathbb{E}(\gamma_p^M(h_p)) = \gamma_p(h_p)$$

Approximation sans biais des mesures non normalisées.

$\Rightarrow$ Si $\hat{f}_n$ bornée $\mathbb{E}(\gamma_n^M(\hat{f}_n)) = \gamma_n(\hat{f}_n) = \mathbb{E}[f_n(X_{0:n})]$

preuve : récurrence car la suite $(\eta^M_\ell)_{0\le \ell\le n}$ est construite par récurrence

initialisation : $\gamma^M_0 = \eta^M_0 = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \delta_{X_0^{0,m}}$ avec les $X_0^{0,m} \sim \eta_0 = \gamma_0$

$$\mathbb{E}(\gamma_0^M(h_0)) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \underbrace{\mathbb{E}(h_0(X_0^{0,m}))}_{\gamma_0(h_0)} = \gamma_0(h_0).$$

hérédité : Supposons $\mathbb{E}(\gamma_p^M(h_p)) = \gamma_p(h_p)$ et montrons que

$$\mathbb{E}(\gamma^M_{p+1}(h_{p+1})) = \gamma_{p+1}(h_{p+1})$$ où $h_{p+1} : E^{p+2} \to \mathbb{R}$ mes bornée.

$$\mathbb{E}(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) \mid \mathcal{F}_p) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\underbrace{\eta^M_{p+1}(h_{p+1})}_{\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} h_{p+1}(X^{p+1,m}_{0:p+1})} \mid \mathcal{G}_{p+1}\big) \mid \mathcal{F}_p\Big)$$

$\mathcal{F}_p = \sigma\big((X^{\ell,m}_{0:\ell})_{1\le m\le M,\ 0\le \ell\le p}\big)$

$\mathcal{G}_{p+1} = \sigma\big((X^{\ell,m}_{0:\ell})_{1\le m\le M,\ 0\le \ell\le p}, (X^{p+1,m}_{0:p})_{1\le m\le M}\big)$

on note $P_{p+1}h_{p+1}(x_{0:p}) = \int_E h_{p+1}(x_{0:p}, y)\, P_{p+1}(x_p, dy)$

D'après mutation $\mathbb{E}(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) \mid \mathcal{G}_{p+1}) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} P_{p+1}h_{p+1}(X^{p+1,m}_{0:p})$

$$\mathbb{E}\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) \mid \mathcal{F}_p\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} P_{p+1}h_{p+1}\left(X^{p+1,m}_{0:p+1}\right) \;\middle|\; \mathcal{F}_p\right)$$

$$\overset{\text{selection}}{=} \frac{1}{M\,\eta^M_p(g_p)} \sum_{m=1}^{M} g_p P_{p+1}h_{p+1}\left(X^{p,m}_{0:p}\right) = \frac{\eta^M_p(g_p P_{p+1}h_{p+1})}{\eta^M_p(g_p)}$$

$$\mathbb{E}\left(\gamma^M_{p+1}(h_{p+1})\right) \overset{\text{def } \gamma^M_{p+1}}{=} \mathbb{E}\Bigg(\underbrace{\eta^M_{p+1}(h_{p+1})}_{\mathbb{E}(\eta^M_{p+1}(h_{p+1})\mid\mathcal{F}_p)} \underbrace{\prod_{k=0}^{p}\eta^M_k(g_k)}_{\mathcal{F}_p \text{ mes}}\Bigg)$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{\eta^M_p(g_p P_{p+1}h_{p+1})}{\eta^M_p(g_p)} \prod_{k=0}^{p}\eta^M_k(g_k)\right) = \mathbb{E}\Bigg(\underbrace{\eta^M_p(g_p P_{p+1}h_{p+1})\prod_{k=0}^{p-1}\eta^M_k(g_k)}_{=\gamma^M_p(g_p P_{p+1}h_{p+1})}\Bigg)$$

hyp recurrence

$$= \gamma_p(g_p P_{p+1}h_{p+1}) = \mathbb{E}\Bigg[\underbrace{P_{p+1}h_{p+1}(X_{0:p})}_{\mathbb{E}(h_{p+1}(X_{0:p+1})\mid X_{0:p})} \underbrace{g_p(X_p)\prod_{k=0}^{p-1}g_k(X_k)}_{\text{fonction de } X_{0:p}}\Bigg]$$

pour $h_p = g_p P_{p+1} h_{p+1}$

$$= \mathbb{E}\left[h_{p+1}(X_{0:p+1})\prod_{k=0}^{p} g_k(X_{0:k})\right] = \gamma_{p+1}(h_{p+1})$$

<u>NB</u>:

- $\mathbb{E}\left(\eta_{p+1}^M(h_{p+1}) \mid \mathcal{F}_p\right) = \dfrac{\eta_p^M(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p^M(g_p)}$

- $\eta_{p+1}(h_{p+1}) = \dfrac{\gamma_{p+1}(h_{p+1})}{\gamma_{p+1}(1)} \underset{\text{déf de } \gamma_p}{\overset{\text{fin preuve}}{=}} \dfrac{\gamma_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\gamma_p(g_p)} = \dfrac{\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p(g_p)}$

- Pour l'absence de biais, on n'a pas besoin des propriétés d'indép dans l'initialisation et d'indép condit dans les étapes de sélection et de mutation. Donc vrai pour échantillonnage systématique

Ces propriétés sont en revanche nécessaires pour le résultat suivant.

Théorème : On suppose que pour tout $p \in \{0, \dots, n-1\}$

$$0 < \underline{g}_p = \inf g_p \leq \sup g_p = \overline{g}_p < +\infty$$ et que les propriétés d'unbf et unbf condit sont satisfaites à l'initialisation et durant les étapes de selection et de mutation.

Alors pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$ et toute fonction $h_p : E^{p+1} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée par $|h_p|$ on a

$$\sup_{M \geq 1} M^2 \, \mathbb{E}\left(\left(\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p)\right)^4\right) < +\infty$$

$$\sup_{M \geq 1} M^2 \, \mathbb{E}\left(\left(\gamma_p^M(h_p) - \gamma_p(h_p)\right)^4\right) < +\infty$$

et $\mathbb{P}\left(\eta_p^M(h_p) \xrightarrow[M \to +\infty]{} \eta_p(h_p)\right) = 1 = \mathbb{P}\left(\gamma_p^M(h_p) \xrightarrow[M \to +\infty]{} \gamma_p(h_p)\right)$.

Corollaire : Sous les hypothèses du théorème, si $f_n : E^{n+1} \to \mathbb{R}$ est mesurable bornée, $\mathbb{P}\left(\gamma_n^M(\tilde{f}_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}(f_n(X_{0:n}))\right) = 1$

preuve : Supposons $C := \sup_M M^2 \, \mathbb{E}\left((\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p))^4 \right) < +\infty$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{M\geq 1} (\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p))^4 \right) \leq C \sum_{M \geq 1} \frac{1}{M^2} < +\infty$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{M \geq 1} (\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p))^4 < +\infty \right) = 1 .$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left((\eta_p^M(h_p) - \eta_p(h_p))^4 \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0 \right) = 1$$ le terme g-al d'une série convergente tend vers 0.

idem pour la cv p.s. de γ_p^M vers γ_p.

<u>Contrôle des moments d'ordre 4 par récurrence :</u>

<u>initialisation</u> : $\mathbb{E}\left((\eta_0^M(h_0) - \eta_0(h_0))^4 \right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M h_0(X_0^{0,m}) - \eta_0(h_0) \right)^4 \right)$

$$= \frac{1}{M^4} \sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=1}^{M} \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^4 \left(h_0(X_0^{0,m_k}) - \mathbb{E}(h_0(\underbrace{X_0^{0,m_k}}_{\sim \eta_0})) \right) \right)$$

Par indep des $(X_0^{0,m})_{1 \leq m \leq M}$, si l'un des indices m_k est distinct des 3 autres l'espérance ds la somme vaut 0.

restent 2 cas : - les 4 indices égaux

M termes en $\mathbb{E}\left(\left(h_0(X_0^{0,1})-\eta_0(h,1)\right)^4\right)$

- 2 indices égaux et prennent une valeur distincte des 2 autres indices qui sont également égaux

$3 \quad M(M-1)$ termes en $\left(\mathrm{Var}\left(h_0(X_0^{0,1})\right)\right)^2$.

valeur de la première paire d'indices égaux

choix de $k \in \{2,3,4\}$ tq $m_k = m_1$

valeur second paire

$$\mathbb{E}\left(\left(\eta_0^M(h_0)-\eta_0(h,1)\right)^4\right) = \frac{1}{M^3}\mathbb{E}\left(\left(h_0(X_0^{0,1})-\eta_0(h_0)\right)^4\right)+\frac{3(M-1)}{M^3}\left(\mathrm{Var}(\;)\right)^2$$

$$= O\left(\frac{1}{M^2}\right).$$

<u>hérédité</u> : On suppose la propriété de moments vraie pour p et on la montre pour $p+1$

$$\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) - \eta_{p+1}(h_{p+1}) = \eta^M_{p+1}(h_{p+1}) - \mathbb{E}\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) \mid \mathcal{F}_p\right) + \frac{\eta^M_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta^M_p(g_p)} - \frac{\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p(g_p)}$$

$$\mathbb{E}\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) - \eta_{p+1}(h_{p+1})\right)^4 \leq 8\,\mathbb{E}\left[\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) - \mathbb{E}\left(\eta^M_{p+1}(h_{p+1}) \mid \mathcal{F}_p\right)\right)^4\right] + 8\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{\eta^M_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta^M_p(g_p)} - \frac{\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p(g_p)}\right)^4\right].$$

$$\left(\frac{\eta^M_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta^M_p(g_p)} - \frac{\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p(g_p)}\right)^4 \leq 8\left(\frac{\eta^M_p(g_p P_{p+1} h_{p+1}) - \eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta^M_p(g_p)}\right)^4 + 8\left(\frac{\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta^M_p(g_p)\,\eta_p(g_p)}\left(\eta_p(g_p) - \eta^M_p(g_p)\right)\right)^4$$

$$\leq \frac{8}{g_p^4}\left(\eta^M_p(g_p P_{p+1} h_{p+1}) - \eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})\right)^4 + 8\,\frac{g_p^4\,\|h_{p+1}\|^4}{g_p^8}\left(\eta_p(g_p) - \eta^M_p(g_p)\right)^4$$

Par hypothèse de récurrence avec $h_p \in \{ g_p P_{p+1} h_{p+1}, g_p \}$,

$$\sup_{M \geq 1} \mathbb{E}\left(\left(\frac{\eta_p^M(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p^M(g_p)} - \frac{\eta_p(g_p P_{p+1} h_{p+1})}{\eta_p(g_p)} \right)^4 \right) < +\infty,$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\eta_{p+1}^M (h_{p+1}) - \mathbb{E}(\eta_{p+1}^M (h_{p+1}) | \mathcal{F}_p) \right)^4 \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m}) - \mathbb{E}(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m}) | \mathcal{F}_p) \right) \right)^4 \Big| \mathcal{F}_p \right) \right)$$

$$= \frac{1}{M^4} \sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=1}^M \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^4 \left(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m_k}) - \mathbb{E}(h_{p+1}(X_{0:p+1}^{p+1,m_k}) | \mathcal{F}_p) \right) \Big| \mathcal{F}_p \right) \right).$$

Par indépendance condit des $X_{0:p+1}^{p+1,m}$ sachant $\mathcal{F}_p$, dès que l'un des 4 indices est distinct des 3 autres,

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^4 (\quad) | \mathcal{F}_p \right) = 0$$

Ainsi comme à l'initialisation, $\mathbb{E}\left(\left(\eta_{p+1}^M (h_{p+1}) - \mathbb{E}(\eta_{p+1}^M (h_{p+1}) | \mathcal{F}_p) \right)^4 \right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^2} \right).$

Contrôle des moments d'ordre 4 pour mesures non normalisées :

$$\gamma_p^M(h_p) - \gamma_p(h_p) = \eta_p^M(h_p) \prod_{k=0}^{p-1} \eta_k^M(g_k) - \eta_p(h_p) \prod_{k=0}^{p-1} \eta_k(g_k).$$

on pose $h_k = g_k$ pour $k \in \{0, \dots, p-1\}$.

$$= \prod_{k=0}^{p} \eta_k^M(h_k) - \prod_{k=0}^{p} \eta_k(h_k)$$

$$\underset{\text{télescopique}}{=} \sum_{k=0}^{p} \prod_{j=k+1}^{p} \eta_j^M(h_j) \times \left(\eta_k^M(h_k) - \eta_k(h_k)\right) \prod_{j=1}^{k-1} \eta_j(h_j).$$

$$\left(\gamma_p^M(h_p) - \gamma_p(h_p)\right)^4 \leq (p+1)^3 \sum_{k=0}^{p} \left(\prod_{j=k+1}^{p} \eta_j^M(h_j)\right)^4 \left(\eta_k^M(h_k) - \eta_k(h_k)\right)^4 \left(\prod_{j=1}^{k-1} \eta_j(h_j)\right)^4$$

$$\leq (p+1)^3 \sum_{k=0}^{p} \prod_{j \neq k} |h_j|^4 \quad \left(\eta_k^M(h_k) - \eta_k(h_k)\right)^4.$$

On conclut que $\mathbb{E}\left(\left(\gamma_p^M(h_p) - \gamma_p(h_p)\right)^4\right) = O\left(\frac{1}{M^2}\right)$ $\blacksquare$