ch III

Discrétisation des Equations Différentielles Stochastiques

I Equations Différentielles Stochastiques :

$T > 0$ horizon $\qquad W_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^d \end{pmatrix}$ mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$.

Y vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ indep de W

$$(EDS) \begin{cases} dX_t = \overset{\in \mathbb{R}^{n\times d}}{\sigma}(t, X_t)\, \overset{\in \mathbb{R}^d}{dW_t} + \overset{\in \mathbb{R}^n}{b}(t, X_t)\, dt & t \in [0,T] \\ X_0 = Y \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(Y, (W_s)_{s\in[0,t]}\right)$$

$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$

$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

def : On appelle solution de (EDS) un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ continue $\mathcal{F}_t$ adapté tq

1) $\mathbb{P}\left(\int_0^T |\sigma(s,X_s)|^2 ds + \int_0^T |b(s,X_s)|\, ds < +\infty\right) = 1$

2) $\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,T],\ X_t = Y + \int_0^t \sigma(s,X_s)\, dW_s + \int_0^t b(s,X_s)\, ds\right) = 1$

Thm d'Itô : On suppose

(Lip) $\exists K < +\infty, \forall t \in [0,T],$ $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n, & |\sigma(t,x)| + |b(t,x)| \leq K(1+|x|) \\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n, & |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| + |b(t,x)-b(t,y)| \leq K|x-y| \ (*) \end{cases}$

Alors (EDS) admet unique solution (si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et $(X'_t)_{t\in[0,T]}$ sont 2 solutions, p.s., $\forall t \in [0,T]$, $X_t = X'_t$).

NB : (Lip) $\Longleftrightarrow$ $(*)$ et

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(|\sigma(t,0)| + |b(t,0)| \right) < +\infty.$$

ex : $(n=d=1)$ $\sigma(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $\int_0^t \frac{dW_s}{\sqrt{s}}$ n'a pas de sens

Exemples : • Ornstein Uhlenbeck $(n=d=1)$ $dX_t = \sigma dW_t + (a - bX_t)dt$

unique solution $X_t = X_0 e^{-bt} + a(1-e^{-bt}) + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} dW_s$

• Black-Scholes $(n=d=1)$ $dX_t = \sigma X_t dW_t + r X_t dt$

unique solution $X_t = X_0 e^{\{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t\}}$

- modèle à volatilité locale $\quad n = d = 1$

$$dX_t = \eta(t, X_t) X_t \, dW_t + r X_t \, dt \quad \text{avec } \eta : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq}$$

$$\sup_{[0,T] \times \mathbb{R}} \left(|\eta(t,x)| + |x| |\partial_x \eta(t,x)| \right) < +\infty .$$

$$X_t = X_0 \, e^{\int_0^t \eta(s, X_s) \, dW_s + rt - \frac{1}{2} \int_0^t \eta^2(s, X_s) \, ds}$$

- modèle à volatilité stochastique $\quad n = d = 2$

$$\begin{cases} dX_t = f(Y_t) X_t \left(\rho \, dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} \, dW_t^2 \right) + r X_t \, dt \\ dY_t = \eta \, dW_t^1 + (a - bY_t) \, dt \end{cases}$$

$\leftarrow$ processus d'Ornstein Uhlenbeck qui ne dépend pas de $(X_t)_t$

$\rho \in [-1,1]$ corrélation entre le brownien $dB_t = \rho \, dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} \, dW_t^2$ qui dirige le sous-jacent et dW_t^1 qui dirige le processus de vol.

$$b(x,y) = \begin{pmatrix} rx \\ a - by \end{pmatrix} \qquad \sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \rho f(y) x & \sqrt{1-\rho^2} \, f(y) x \\ \eta & 0 \end{pmatrix}$$

Dès que f n'est pas constante $f(x) y$ n'est pas lipschitz.

Existence d'une unique solution si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement bornée.

$(f(Y_t))_{t\in[0,T]}$: par continuité de $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ /

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |f(Y_t)| < +\infty\right) = 1.$$

Ainsi $\left(\int_0^t f(Y_s)\, dB_s\right)_{t\in[0,T]}$ est bien défini

$$\xi_t = X_0\, e^{\int_0^t f(Y_s)\, dB_s + rt - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(Y_s)\, ds}$$

exo : vérifier que $d\xi_t = \xi_t f(Y_t)\, dB_t + r\xi_t\, dt$

$$d\left(\frac{X_0}{\xi_t}\right) \overset{\text{Itô}}{=} \frac{X_0}{\xi_t}\left(-f(Y_t)\, dB_t - r\, dt + \frac{1}{2} f^2(Y_t)\, dt + \underbrace{\frac{1}{2} f^2(Y_t)\, dt}_{\text{correction d'Itô}}\right)$$

Si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ solution de la 1ère équation

$$d\left(X_t \frac{X_0}{\xi_t}\right) \overset{\text{IPP}}{=} X_t\, d\left(\frac{X_0}{\xi_t}\right) + \frac{X_0}{\xi_t}\, dX_t + d\left\langle X_\cdot, \frac{X_0}{\xi_\cdot}\right\rangle_t$$

$$= X_t \frac{X_0}{\xi_t}\left(\cancel{-f(Y_t)\, dB_t} \cancel{- r\, dt} + \cancel{f^2(Y_t)\, dt} + \cancel{f(Y_t)\, dB_t} \cancel{+ r\, dt} \cancel{- f^2(Y_t)\, dt}\right) = 0$$

Comme $X_0 \frac{X_0}{\xi_0} = X_0$ $\quad X_t \frac{X_0}{\xi_t} = X_0$ ie $X_t = \xi_t$.

Si on veut calculer le prix $\mathbb{E}(e^{-rT}(X_T - K)_+)$ d'un Call dans le modèle à vol locale ou le modèle à vol stoch on n'a pas de formule semi-explicite comme la formule de Black-Scholes - pas non plus d'expression explicite de X_T à l'aide du brownien

Il nous reste la dynamique donnée par l'EDS.

On va la discrétiser pour pouvoir approcher X_T.

<u>Propriétés des solutions de :</u>

$$dX_t = \sigma(t, X_t)\, dW_t + b(t, X_t)\, dt \quad , \quad X_0 = y \in \mathbb{R}^n$$
déterministe

<u>Lemme</u>: Soit $p \geq 1$. <u>Sous (Lip)</u>, il existe une constante $C < \infty$ dépendant de p, T, σ, b mais pas de y tq

$$\sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}(|X_t|^{2p}) \leq C(1 + |y|^{2p})$$

Preuve : $x \mapsto \varphi(x) = |x|^{2p}$

$$\nabla \varphi(x) = 2p\,|x|^{2p-2}\, x$$

$$\nabla^2 \varphi(x) = 2p\,|x|^{2p-4} \Big(|x|^2 I_n + (2p-2)\, \underbrace{x \otimes x}_{(x_i x_j)_{1 \le i,j \le n}} \Big).$$

$$|X_t|^{2p} \overset{\text{Itô}}{=} |y|^{2p} + \int_0^t 2p\,|X_s|^{2p-2} X_s \cdot \big(b(s,X_s)\,ds + \sigma(s,X_s)\,dW_s \big)$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^t 2p\,|X_s|^{2p-4}\, \mathrm{tr}\Big(\big(|X_s|^2 I_n + (2p-2)\, X_s \otimes X_s \big) \underbrace{a(s,X_s)}_{\sigma\sigma^*(s,X_s)} \Big)\, ds.$$

Soit pour $m > 0$, $\tau_m = \inf\{ t \geq 0,\ |X_t| \geq m \}$ localisation pour assurer que $\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_m} \dots \, dW_s\right) = 0$

Convention $\inf \emptyset = T$

$|X_{t\wedge\tau_m}| \leq |y| \vee m$ p.s. $\tau_m = T$ pour m grd

$$\mathbb{E}\left(|X_{t\wedge\tau_m}|^{2p} \right) \leq |y|^{2p} + C\,\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_m} |X_s|^{2p-1}(1+|X_s|) + |X_s|^{2p-2}(1+|X_s|)^2 \, ds \right)$$
$$\leq |y|^{2p} + C \int_0^t \mathbb{E}\Big(\underbrace{|X_{s\wedge\tau_m}|^{2p-2} + |X_{s\wedge\tau_m}|^{2p-1} + |X_{s\wedge\tau_m}|^{2p}}_{\leq 3(1+|X_{s\wedge\tau_m}|^{2p})} \Big)\, ds.$$

$$\mathbb{E}\left(|X_{t\wedge\tau_m}|^{2p} \right) \leq C(1+|y|^{2p}) + C \int_0^t \mathbb{E}\left(|X_{s\wedge\tau_m}|^{2p} \right) ds$$

où C change de ligne en ligne mais ne dépend ni de t ni de y ni de m

Par le lemme de Gronwall,

$$\forall t \in [0,T], \quad \mathbb{E}\left(\underbrace{|X_{t\wedge\nu_m}|^{2p}}\right) \leq C\,(1+|y|^{2p})\,e^{Ct}$$

$m \to +\infty$ p.s. par continuité des trajectoires

$$|X_t|^{2p}$$

Lemme de Fatou : $\mathbb{E}\left(|X_t|^{2p}\right) \leq \liminf_{m\to+\infty} \mathbb{E}\left(|X_{t\wedge\nu_m}|^{2p}\right)$

$$\leq C\,(1+|y|^{2p})\,e^{Ct}.$$

$$\boxed{\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left(|X_t|^{2p}\right) \leq C\,(1+|y|^{2p})\,e^{CT}}$$

Quelques inégalités :

- $\left|\sum_{\ell=1}^{K} a_\ell\right|^q \leq K^{q-1}\sum_{\ell=1}^{K}|a_\ell|^q$ (convexité, $q\geq 1$) $\left(\text{preuve : } \left|\frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K} a_\ell\right|^q \leq \frac{1}{K}\sum_{\ell=1}^{K}|a_\ell|^q \text{ Jensen}\right)$
- $\left|\int_A f(x)\,dx\right|^q \leq \left(\int_A dx\right)^{q-1}\int_A |f(x)|^q\,dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{clair si } \int_A dx \in \{0,+\infty\} \\ \text{Jensen sinon}\end{array}\right)$

__Lemme__ : Burkholder Davies Gundy. Soit $p\geq 1$.

$\exists\, C_p<+\infty$, telle que pour tout processus $(H_s)_{s\geq 0}$ $\mathcal{F}_s$ adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times d}$ et tout $t\geq 0$ tq $\mathbb{P}\left(\int_0^t |H_s|^2 ds<+\infty\right)=1$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}\left|\int_0^s H_r\,dW_r\right|^{2p}\right)\leq C_p\,\mathbb{E}\left(\left(\int_0^s |H_r|^2 dr\right)^p\right)$$

__NB__ : Pour $p=1$ c'est l'inégalité de Doob valable pour $C_1=4$.

$\underline{\text{Prop}}$: Sous (H_f) pour $p \geq 1$,
$\exists\, C < +\infty$, $\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T$, $\mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^{2p}\right) \leq C\left(1+|y|^{2p}\right)(t-s)^p$

Preuve : $|X_t - X_s|^{2p} \leq 2^{2p-1}\left(\left|\int_s^t \sigma(r, X_r)\, dW_r\right|^{2p} + \left|\int_s^t b(r, X_r)\, dr\right|^{2p}\right)$

$$\mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^{2p}\right) \leq 2^{2p-1}\Bigg(\underbrace{\mathbb{E}\left(\left|\int_s^t \sigma(r,X_r)\, dW_r\right|^{2p}\right)} + \mathbb{E}\Big(\underbrace{(t-s)^{2p-1}}_{\leq T^p (t-s)^{p-1}} \int_s^t |b(r,X_r)|^{2p} dr\Big)\Bigg)$$

$$\overset{BDG}{\leq} C_p \mathbb{E}\left(\left(\int_s^t |\sigma(r,X_r)|^2 dr\right)^p\right)$$

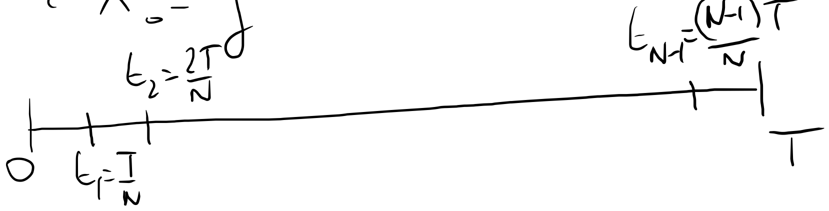
$$\leq C_p (t-s)^{p-1}\, \mathbb{E}\left(\int_s^t |\sigma(r,X_r)|^{2p} dr\right)$$

$$\leq C\,(t-s)^{p-1} \int_s^t \mathbb{E}\Big(\underbrace{(1+|X_r|)^{2p}}_{\leq 2^{2p-1}(1+|X_r|^{2p})}\Big)\, dr$$ car b, σ à croissance affine

Lemme moments
$$\leq C\,(t-s)^{p-1} \int_s^t C\left(1+|y|^{2p}\right) dr \leq C\left(1+|y|^{2p}\right)(t-s)^p$$

II Le schéma d'Euler (Maruyama) :

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t,X_t)\,dW_t + b(t,X_t)\,dt & t\in[0,T] \\ X_0 = y \end{cases}$$



$\left(t_\ell = \frac{\ell T}{N}\right)_{0\leq \ell\leq N}$ où $N\in\mathbb{N}^*$.

$\bar{X}^N_0 = y$ et par récurrence on pose

$$\bar{X}^N_{t_{\ell+1}} = \bar{X}^N_{t_\ell} + \sigma(t_\ell, \bar{X}^N_{t_\ell})(W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell}) + b(t_\ell, \bar{X}^N_{t_\ell})\overbrace{(t_{\ell+1} - t_\ell)}^{\frac{T}{N}}$$

Pour simuler le schéma d'Euler, il suffit de générer les vecteurs aléatoires $(W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell})_{0\leq \ell\leq N-1}$ i.i.d $\sim \mathcal{N}_d\left(0, \frac{T}{N} I_d\right)$

<u>Schéma d'Euler en temps continu</u> : sur $[t_\ell, t_{\ell+1}]$ on interpole en suivant le brownien

$\forall t\in[t_\ell, t_{\ell+1}]$, $\bar{X}^N_t = \bar{X}^N_{t_\ell} + \sigma(t_\ell, \bar{X}^N_{t_\ell})(W_t - W_{t_\ell}) + b(t_\ell, \bar{X}^N_{t_\ell})(t - t_\ell)$

$(\overline{X}^N_t)_{t\in[0,T]}$ processus d'Itô qui vérifie

$$d\overline{X}^N_t = \sigma(\tau_t, \overline{X}^N_{\tau_t})\,dW_t + b(\tau_t, \overline{X}^N_{\tau_t})\,dt$$

où $\tau_t = \lfloor \frac{Nt}{T} \rfloor \frac{T}{N}$ instant de la grille juste avant t.

Bien sûr pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $\mathcal{L}(W_t - W_{t_k} \mid W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \mathcal{N}_d\left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}), \frac{(t_{k+1}-t)(t-t_k)}{t_{k+1}-t_k} I_d\right)$

Thm : Sous (hyp) et

$\exists K < +\infty, \exists \beta \in]0,1]$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall 0 \leq s \leq t \leq T$,
$|\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| + |b(t,x) - b(s,x)| \leq K(1+|x|)(t-s)^\alpha$.

$\forall p \geq 1, \exists C_p < +\infty, \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall N \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t - \overline{X}^N_t|^{2p}\right) \leq \frac{C_p(1+|y|)^{2p}}{N^{2\beta p}}$
où $\beta = \min(\alpha, \frac{1}{2})$.

En outre $\forall \gamma < \beta$, $N^\gamma \sup_{t\in[0,T]} |X_t - \overline{X}^N_t| \xrightarrow[N\to+\infty]{p.s} 0$

NB : ordre de convergence fort du schéma d'Euler est $\beta = \min(\alpha, \frac{1}{2})$
en particulier ordre $\frac{1}{2}$ si $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

$$\sup_{N\geq 1} N^{\beta} \left\| \sup_{t\in[0,T]} |X_t - \bar{X}_t^N| \right\|_{2p} < +\infty .$$

Preuve : Déduisons d'abord la seconde assertion de la 1ère

$\gamma < \beta$ $\quad \mathbb{E}\left(\left(N^{\gamma} \sup_{t\in[0,T]} |X_t - \bar{X}_t^N|\right)^{2p}\right) \leq \dfrac{C_p\,(1+|y|^{2p})}{N^{2p(\beta-\gamma)}}$

Pour obtenir une série convergente on choisit $p > \dfrac{1}{2(\beta-\gamma)}$.

Alors $\quad \mathbb{E}\left(\sum_{N\geq 1} \left(N^{\gamma} \sup_{t\in[0,T]} |X_t - \bar{X}_t^N|\right)^{2p} \right) < +\infty$

Donc $\quad \mathbb{P}\left(\sum_{N\geq 1} \left(N^{\gamma} \sup_{t\in[0,T]} |X_t - \bar{X}_t^N|\right)^{2p} < +\infty \right) = 1$

Donc $\quad \mathbb{P}\left(N^{\gamma} \sup_{t\in[0,T]} |X_t - \bar{X}_t^N| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \right) = 1 .$

$$\left(\mathbb{E}\sup_{u\le t}|X_u-\bar X^N_u|^{2p}\le 2^{2p}\,\mathbb{E}\left(\sup_{u\le t}\left|\int_0^u\left(\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})\right)dW_s\right|^{2p}+\sup_{u\le t}\left|\int_0^u\left(b(s,X_s)-b(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})\right)ds\right|^{2p}\right)\right)$$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u\le t}|X_u-\bar X^N_u|^{2p}\right)\le 2^{2p-1}\left(C_p\,\underbrace{\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t|\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})|^2ds\right)^p\right)}_{\le \underbrace{t^{p-1}}_{\le T^{p-1}}\int_0^t\mathbb{E}\left(|\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})|^{2p}\right)ds}+\overbrace{t^{2p-1}}^{\le T^{2p-1}}\int_0^t\mathbb{E}\left(|b(s,X_s)-b(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})|^{2p}\right)ds\right)$$

$$\le C\int_0^t\mathbb{E}\left(|\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})|^{2p}+|b(s,X_s)-b(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})|^{2p}\right)ds$$

$$|\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})|^{2p}\le 3^{2p-1}\left(\underbrace{|\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,X_s)|^{2p}}_{\text{holder temps}}+\underbrace{|\sigma(\tau_s,X_s)-\sigma(\tau_s,X_{\tau_s})|^{2p}+|\sigma(\tau_s,X_{\tau_s})-\sigma(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})|^{2p}}_{\text{Lipschitz en espace}}\right)$$

$$\mathbb{E}\left(|\sigma(s,X_s)-\sigma(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})|^{2p}\right)\le C\left(\underbrace{\mathbb{E}\left((1+|X_s|)^{2p}\right)}_{\text{Lemme moments}}(s-\tau_s)^{2\alpha p}+\underbrace{\mathbb{E}\left(|X_s-X_{\tau_s}|^{2p}\right)}_{\substack{\text{Prop accroissements}\\ \le C(1+|y|^{2p})(s-\tau_s)^p}}+\mathbb{E}\left(|X_{\tau_s}-\bar X^N_{\tau_s}|^{2p}\right)\right)$$

$$s-\tau_s\le\frac{T}{N}$$

$$\le C\left(\frac{(1+|y|^{2p})}{N^{2p\underbrace{(\alpha\wedge\frac12)}_{\beta}}}+\mathbb{E}\left(\sup_{u\le s}|X_u-\bar X^N_u|^{2p}\right)\right)$$

idem pour $\mathbb{E}\left(|b(s,X_s)-b(\tau_s,\bar X^N_{\tau_s})|^{2p}\right)$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq t}|X_u-\overline{X}^N_u|^{2p}\right)\leq C\left(\frac{1+|y|^{2p}}{N^{2p\beta}}+\int_0^t\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s}|X_u-\overline{X}^N_u|^{2p}\right)ds\right)$$

Gronwall $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq T}|X_u-\overline{X}^N_u|^{2p}\right)\leq\frac{C(1+|y|^{2p})}{N^{2p\beta}}}$

pb : On n'a pas montré que $\int_0^T\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq t}|X_u-\overline{X}^N_u|^{2p}\right)dt<+\infty$ qui est l'une des hypothèses de Gronwall.

Cela se résout par localisation en posant $\nu_m=\inf\{t\in[0,T]:|X_t-\overline{X}^N_t|\geq m\}$

On reprend nos calculs pour établir que $\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq t}\underbrace{|X_{u\wedge\nu_m}-\overline{X}^N_{u\wedge\nu_m}|^{2p}}_{\leq m^{2p}}\right)\leq \underset{\text{ne dépend pas de } m}{C}\left(\frac{1+|y|^{2p}}{N^{2p\beta}}+\int_0^t\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s}|X_{u\wedge\nu_m}-\overline{X}^N_{u\wedge\nu_m}|^{2p}\right)ds\right)$

Gronwall $\rightarrow$ $\mathbb{E}\left(\underbrace{\sup_{u\leq T}|X_{u\wedge\nu_m}-\overline{X}^N_{u\wedge\nu_m}|^{2p}}_{\xrightarrow[m\to+\infty]{}\sup_{u\leq T}|X_u-\overline{X}^N_u|^{2p}}\right)\leq\frac{C(1+|y|^{2p})}{N^{2p\beta}}$

Fatou $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq T}|X_u-\overline{X}^N_u|^{2p}\right)\leq\liminf_{m\to+\infty}\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq T}|X_{u\wedge\nu_m}-\overline{X}^N_{u\wedge\nu_m}|^{2p}\right)$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lipschitz brutal car empêche les effets d'accumulation d'erreur en moyenne.

$$\left|\mathbb{E}(f(X_T)) - \mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N))\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|f(X_T) - f(\bar{X}_T^N)\right|\right)$$

$$\leq \mathrm{Lip}(f)\, \mathbb{E}\left|X_T - \bar{X}_T^N\right|$$

$$\leq \mathrm{Lip}(f) \sqrt{\mathbb{E}\left(\sup_{t \leq T} |X_t - \bar{X}_t^N|^2\right)} \leq \frac{\mathrm{Lip}(f)\, C_2}{N^\beta}$$

contrôle du biais de discrétisation

Thm : Talay Tubaro (développement de l'erreur faible du schéma d'Euler)

On suppose σ, b C^∞ avec des dérivées de tous ordres bornées $\Leftarrow$ lip et $\beta = \frac{1}{2}$ car $\alpha = 1$) et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞ avec les dérivées à croissance polynomiale ie

$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ $\exists p, C < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\left|\dfrac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right| \leq C(1+|x|^p)$

Alors $\forall L \in \mathbb{N}^*$, $\exists (c_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}$ tq

$$\boxed{\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \sum_{\ell=1}^{L} \frac{c_\ell}{N^\ell} + O\left(\frac{1}{N^{L+1}}\right)}$$

En particulier $\sup_{N\geq 1} N \left| \mathbb{E}(f(\overline{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T)) \right| < +\infty$

ordre de cv 1 alors qu'ordre $\beta = \frac{1}{2}$ en utilisant le résultat de cv forte du schéma d'Euler.

Il y a effectivement des annulations d'erreur en moyenne.

NB: $\sup_{N\geq 1} N \left| \mathbb{E}(f(\overline{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T)) \right| < +\infty$ dès que σ, b C^3 avec dérivées bornées et f C^3 avec dérivées à croissance polynomiale.

Le développement de l'erreur permet des extrapolations de Romberg Richardson

$$\mathbb{E}\left(2f(\overline{X}_T^{2N}) - f(\overline{X}_T^N)\right) - \mathbb{E}(f(X_T)) = 2\,\mathbb{E}\left(f(\overline{X}_T^{2N}) - f(X_T)\right) + \mathbb{E}\left(f(X_T) - f(\overline{X}_T^N)\right)$$

s'estime en simulant les 2 schémas

développement

$$= 2\left(\cancel{\frac{C_1}{2N}} + \frac{C_2}{(4N)^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)\right) - \left(\cancel{\frac{C_1}{N}} + \frac{C_2}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)\right) = -\frac{C_2}{2N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right)$$

vitesse $\frac{1}{N^2}$ ie ordre 2

En cas de simulation indep du schéma avec 2N pas et de celui avec N pas

$$\mathrm{Var}\left(2f(\bar{X}^{2N}_T)\right) + \mathrm{Var}\left(f(\bar{X}^N_T)\right) = 4\,\mathrm{Var}\left(f(\bar{X}^{2N}_T)\right) + \mathrm{Var}\left(f(\bar{X}^N_T)\right)$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} 5\,\mathrm{Var}\left(f(X_T)\right) \quad (\text{cv forte}).$$

En cas de simulation avec les mêmes accroissements browniens,

$$\mathrm{Var}\left(2f(\bar{X}^{2N}_T) - f(\bar{X}^N_T)\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{Var}\left(f(X_T)\right)$$

Asymptotiquement reduction de variance par facteur 5.

$$\left(W_{\frac{(\ell+1)T}{2N}} - W_{\frac{\ell T}{2N}}\right)_{0\leq \ell\leq 2N-1} \quad \text{iid} \sim \mathcal{N}_d\left(0, \frac{T}{2N} I_d\right).$$

Pour $0\leq j\leq N$, on recupère $W_{\frac{jT}{N}} - W_{\frac{(j-1)T}{N}} = W_{\frac{2jT}{2N}} - W_{\frac{(2j-1)T}{2N}} + W_{\frac{(2j-1)T}{2N}} - W_{\frac{2(j-1)T}{2N}}$

En prenant une combinaison linéaire des schémas avec (mN) pas pour $1\leq m\leq \ell$, on peut obtenir un ordre faible ℓ

Prop : Sous les hypothèses du théorème, l'EDP de Feynman Kac

$$a(t,x) = \sigma\sigma^*(t,x) \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(t,x)\cdot\nabla_x u(t,x) + \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{tr}\left(\nabla_x^2 u(t,x)\, a(t,x)\right)}_{\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x)\, a_{ij}(t,x)} = 0 & (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^m \\ u(T,x) = f(x), & x\in\mathbb{R}^m \end{cases}$$

admet une unique solution. Cette solution est C^∞ avec des dérivées à croissance polynomiale et

$$\boxed{\mathbb{E}(f(X_T)) = u(0,y)} \quad (*)$$

NB :

$$\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N)) = \mathbb{E}(u(T,\bar{X}_T^N))$$

$$\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \mathbb{E}\Big(u(T,\bar{X}_T^N) - u(0,\overbrace{\bar{X}_0^N}^{y})\Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}\left(u(t_{k+1},\bar{X}_{t_{k+1}}^N) - u(t_k,\bar{X}_{t_k}^N)\right)$$

__Preuve de (*)__

$$du(t,X_t) \overset{\text{Itô}}{=} \cancel{\partial_t u(t,X_t)dt} + \nabla_x u(t,X_t)\cdot \overbrace{dX_t}^{\cancel{b(t,X_t)dt} + \sigma(t,X_t)dW_t}$$
$$+ \cancel{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)\, a_{ij}(t,X_t)\,dt}$$

$$= \nabla_x u(t,X_t)\cdot\sigma(t,X_t)dW_t$$

Par intég sur $[0,T]$, il vient

$$\underbrace{u(T,X_T)}_{\mathbb{E}\left(f(X_T)\right)} = u(0,\underbrace{X_0}_{y}) + \underbrace{\mathbb{E}\int_0^T \nabla_x u(s,X_s)\cdot \sigma(s,X_s)\, dW_s}_{=0 \text{ car}}.$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \left|\sigma^*(s,X_s)\,\nabla_x u(s,X_s)\right|^2 ds\right) < +\infty$$

d'après le lemme sur les moments, la croissance affine de σ et la $\nearrow$ poly de $\nabla_x u$. $\blacksquare$