ch IV

Simulation de processus comportant des sauts :

I Diffusions avec sauts :

1) processus de Poisson :

déf : On appelle processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ un processus $(N_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ à trajectoires continues à droite tq $\forall\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les accroissements $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indep et resp. distribués suivant les lois de Poisson de paramètres $\lambda t_1, \lambda(t_2 - t_1), \dots, \lambda(t_n - t_{n-1})$.

- Pour $\theta > 0$ $\nu \sim \mathcal{P}(\theta)$ si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\nu = n) = e^{-\theta} \frac{\theta^n}{n!}$

$\nu \sim$ Poisson $\mathcal{P}(0)$ si $\mathbb{P}(\nu = 0) = 1$

NB : • Un processus de Poisson est un Processus à Accroissements Indépendants et Stationnaires (ou processus de Lévy).

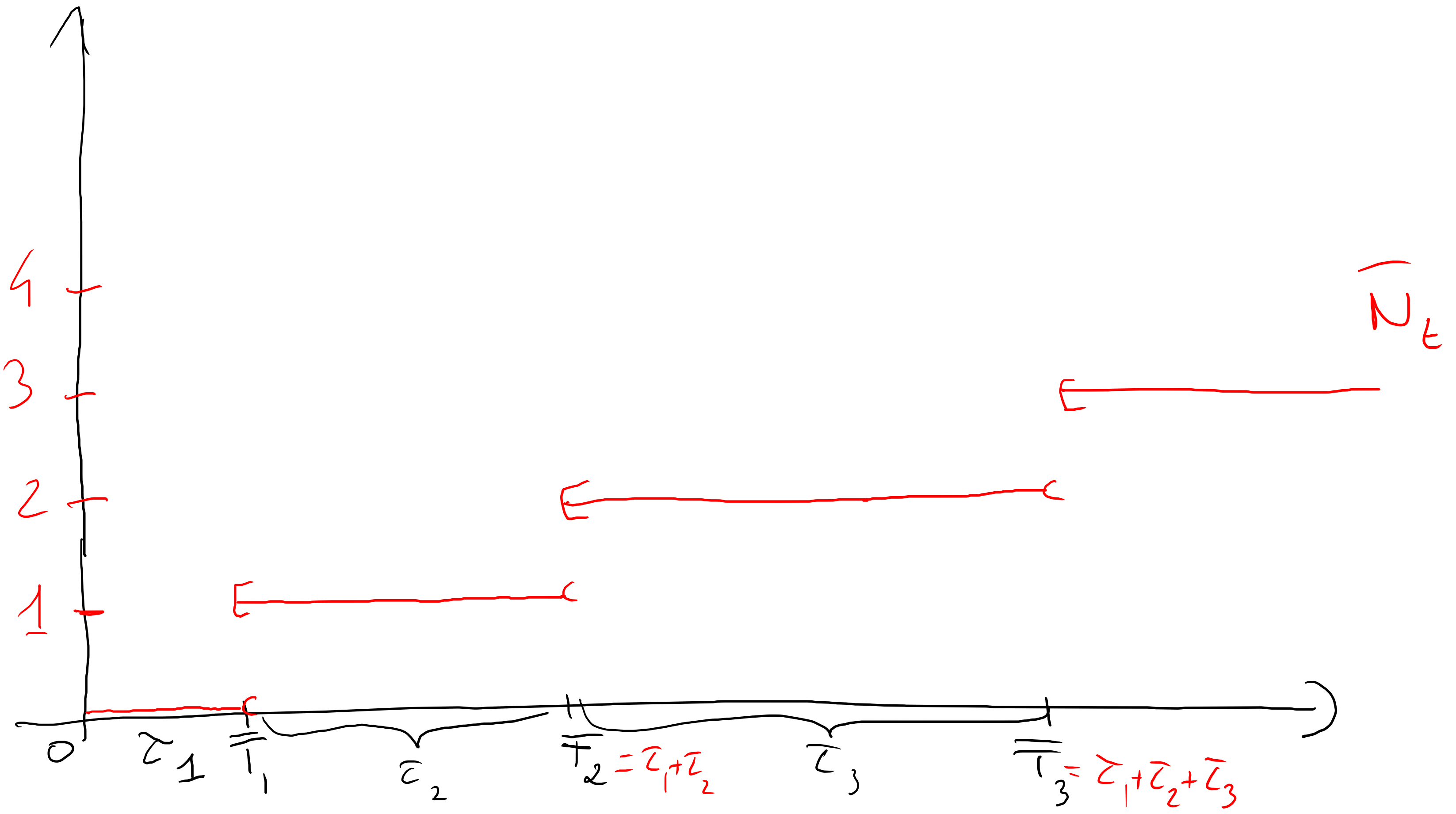
• pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{P}(N_t - N_s \geq 0) = 1$. Donc les trajectoires sont croissantes à valeurs entières.

• $N_0 \sim \mathcal{P}(0)$ Donc $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$

Prop : - Soit $(\tau_i)_{i \geq 1}$ iid $\sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $T_n = \tau_1 + \dots + \tau_n$

Alors $\left(\overline{N}_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}\right)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ.

- Inversement, si $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ, et si $T_i = \inf\{t \geq 0 : N_t \geq i\}$ $(i \geq 1)$ alors les vax $(T_i - T_{i-1})_{i \geq 1}$ (convention $T_0 = 0$) sont iid $\sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $N_t = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}}$. ($\Leftrightarrow T_i = \inf\{t \geq 0 : N_t = i\}$)



N_t
1
2
3
4
0
τ_1
T_1
τ_2
$T_2 = \tau_1 + \tau_2$
τ_3
$T_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$

preuve : Soit $(\tau_i)_{i\geq 1}$ iid $\sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\quad T_n = \tau_1+\dots+\tau_n \quad \bar N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n\le t\}}$

Soient $0\le s\le t$, $\quad k,\ell\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(\bar N_s = k, \bar N_t - \bar N_s = \ell) = \mathbb{P}(\bar N_s = k, \bar N_t = k+\ell)$$

$$= \mathbb{P}(\tau_1+\dots+\tau_k \le s < \tau_1+\dots+\tau_{k+1}, \tau_1+\dots+\tau_{k+\ell} \le t < \tau_1+\dots+\tau_{k+\ell+1})$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^{k+\ell+1}} 1_{\{s_1+\dots+s_k \le s < s_1+\dots+s_{k+1},\ s_1+\dots+s_{k+\ell}\le t,\ s_{k+\ell+1} > t-(s_1+\dots+s_{k+\ell})\}} \lambda^{k+\ell+1} e^{-\lambda(s_1+\dots+s_{k+\ell+1})} ds_1\dots ds_{k+\ell+1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^{k+\ell}} 1_{\{s_1+\dots+s_k\le s < s_1+\dots+s_{k+1},\ s_1+\dots+s_{k+\ell}\le t\}} \lambda^{k+\ell} e^{\cancel{-\lambda(s_1+\dots+s_{k+\ell})}} e^{-\lambda t} e^{\cancel{\lambda(s_1+\dots+s_{k+\ell})}} ds_1\dots ds_{k+\ell}$$

car $\displaystyle\int_{\underbrace{t-(s_1+\dots+s_{k+\ell})}_{\geq 0}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s_{k+\ell+1}} ds_{k+\ell+1} = e^{-\lambda(t-(s_1+\dots+s_{k+\ell}))}$

$$= e^{-\lambda t}\lambda^{k+\ell}\int 1_{\{0\le r_1\le r_2\le\dots\le r_k\le s\le r_{k+1}\le\dots\le r_{k+\ell}\le t\}} dr_1\dots dr_{k+\ell}$$

chgt de variables linéaire

$r_1 = s_1$
$r_2 = s_1+s_2$
$\vdots$
$r_{k+\ell} = s_1+\dots+s_{k+\ell}$

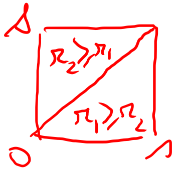
avec une matrice triangulaire avec des 1 sur diago

Donc jacobien $= 1$

$$= e^{-\lambda t}\lambda^{k+\ell}\left(\int 1_{\{0\le r_1\le\dots\le r_k\le s\}} dr_1\dots dr_k\right)\left(\int 1_{\{0\le r_1\le\dots\le r_\ell\le t-s\}} dr_1\dots dr_\ell\right)$$

$$\int 1_{\{0\le r_1\le\dots\le r_k\le s\}} dr_1\dots dr_k = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\int 1_{\{0\le r_{\sigma(1)}\le\dots\le r_{\sigma(k)}\le s\}} dr_1\dots dr_k$$

$$= \frac{1}{k!}\int_{[0,s]^k} dr_1\dots dr_k = \frac{s^k}{k!}$$



$$\mathbb{P}(\bar N_s = k, \ \bar N_t - \bar N_s = \ell) = e^{-\lambda t} \lambda^{k+\ell} \frac{s^k}{k!} \frac{(t-s)^\ell}{\ell!}$$

$$= e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \times e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^\ell}{\ell!}$$

$$\Rightarrow \quad \bar N_s \sim \mathcal{P}(\lambda s) \qquad \bar N_t - \bar N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t-s)) \quad \text{indep}$$

Supposons maintenant que N_t est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et posons $S_1 = \inf\{t \geq 0 : N_t > 0\}$ et $S_{n+1} = \inf\{t \geq 0 : N_t > N_{S_n}\}$ pour $n \geq 1$ les temps de croissance du processus.

Pour $t \geq 0$, $\mathbb{P}(S_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$ $\qquad \mathbb{P}(S_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Comme la fonction de répartition caractérise la loi $S_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Par propriété de Markov forte au temps S_1, $(N_{t+S_1} - N_{S_1})_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ indep de ce qui s'est passé avant S_1

$\Rightarrow \quad S_2 - S_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$ indep. de S_1.

Plus généralement les variables $(S_n - S_{n-1})_{n \geq 1}$ (convention $S_0 = 0$) sont iid $\sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Soit V_n la taille du saut à l'instant S_n pour $n \geq 1$.

V_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

$$\underset{\sim \mathcal{P}(\lambda t)}{N_t} = \sum_{n \geq 1} \underset{\geq 1}{V_n} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} \geq \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}$$

$\sim \mathcal{P}(\lambda t)$ d'après 1ère assertion

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\Big(N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}\Big) = 1.$$

$\blacksquare$

Simulation d'un processus de Poisson de paramètre λ :

- génération des temps de saut :

Si $(U_i)_{i\geq 1}$ iid $\sim \mathcal{U}[0,1]$ alors $\left(-\frac{1}{\lambda}\ln U_i\right)_{i\geq 1}$ sont iid $\mathcal{E}(\lambda)$.

$$\left(\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\left\{\underbrace{-\frac{1}{\lambda}\ln\prod_{i=1}^{n} U_i}_{\text{temps de } n\text{ième saut}} \leq t\right\}}\right)_{t\geq 0}$$

est un processus de Poisson de paramètre λ.

- simulation des temps déterministes $0\leq t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_n$

il suffit de générer $N_{t_1}, N_{t_2}-N_{t_1}, \dots, N_{t_n}-N_{t_{n-1}}$ indep et resp distribuées suivant $\mathcal{P}(\lambda t_1), \mathcal{P}(\lambda(t_2-t_1)), \dots, \mathcal{P}(\lambda(t_n-t_{n-1}))$.

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\left\{-\frac{1}{\lambda t}\ln\prod_{i=1}^{n} U_i \leq 1\right\}} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\left\{\prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-\lambda t}\right\}} = \min\left\{k\in\mathbb{N} \text{ tq } \prod_{i=1}^{k+1} U_i < e^{-\lambda t}\right\}$$

Pour $\theta>0$, en choisissant $t=\frac{\theta}{\lambda}$, on obtient que $\min\left\{k\in\mathbb{N}, \prod_{i=1}^{k+1} U_i < e^{-\theta}\right\}\sim\mathcal{P}(\theta)$.

def : Soit $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mesurable tq $\forall t \geq 0$, $\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(s)\,ds < +\infty$.

On appelle processus de Poisson d'intensité $\lambda(\cdot)$ un processus $(N_t)_{t\geq 0}$ càdlàg tq $\forall\, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ les variables $N_{t_1}, N_{t_2}-N_{t_1}, \dots, N_{t_n}-N_{t_{n-1}}$ sont indep et resp distribuées suivant $\mathcal{P}(\Lambda(t_1)), \mathcal{P}(\Lambda(t_2)-\Lambda(t_1)), \dots, \mathcal{P}(\Lambda(t_n)-\Lambda(t_{n-1}))$.

NB : • Si $\lambda(\cdot)$ est constante égale à λ, $\Lambda(t) = \lambda t$

• sinon le processus est à accroissements indep mais pas stationnaires.

Prop : Soit $(U_i)_{i\geq 1}$ iid $\sim \mathcal{U}[0,1]$ et $\forall n \geq 1$ $T_n = \inf\{t \geq 0 : \Lambda(t) = -\sum_{i=1}^n \ln U_i\}$ Convention $\inf \emptyset = +\infty$

Alors $\left(N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}\right)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda(\cdot)$.

Preuve :

Si $T_n < +\infty$, $\Lambda(T_n) = -\sum_{i=1}^{n} \ln U_i$

Par croissance de Λ, pour $t \geq T_n$, $\Lambda(t) \geq -\sum_{i=1}^{n} \ln U_i$

Inversement si $\Lambda(t) \geq -\sum_{i=1}^{n} \ln U_i$, par déf de T_n et continuité de Λ, $T_n \leq t$.

Ainsi $T_n \leq t \iff -\sum_{i=1}^{n} \ln U_i \leq \Lambda(t)$

Posons $N_t^1 = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{-\sum_{i=1}^{n} \ln U_i \leq t\}}$ pour $t \geq 0$

$(N_t^1)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre 1 car $(-\ln U_i)_{i \geq 1} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(1)$

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{-\sum_{i=1}^{n} \ln U_i \leq \Lambda(t)\}} = N^1_{\Lambda(t)}$$

On en déduit que $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ indep et resp distribuées suivant $\mathcal{P}(\Lambda(t_1)), \mathcal{P}(\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1)), \ldots, \mathcal{P}(\Lambda(t_n) - \Lambda(t_{n-1}))$.

Proposition : (sauts fictifs).

Soit $\lambda : \mathbb{R}_+ \to [0, \bar{\lambda}]$ où $\bar{\lambda} < +\infty$ mesurable.

indep $\left(\begin{array}{l} \cdot\ (\bar{T}_k)_{k \geq 1} \text{ les temps de saut d'un processus de Poisson de paramètre } \bar{\lambda} \\ \cdot\ (U_k)_{k \geq 1} \text{ suite iid} \sim \mathcal{U}[0,1] \end{array} \right.$

Partant de $T_0 = 0$ on pose

$$T_{n+1} = \inf\left\{ \bar{T}_k > T_n : U_k \leq \frac{\lambda(\bar{T}_k)}{\bar{\lambda}} \right\} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Alors $\left(N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} \right)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda(\cdot)$.

Intuition : $\mathbb{P}(N_{t+dt} - N_t = 1) = \mathbb{P}(1 \text{ saut } \bar{T}_k \text{ entre } t \text{ et } t+dt \text{ et saut accepté}) + \mathbb{P}(\text{plus de } 1 \text{ saut et l'un est accepté})$

$$= \bar{\lambda}\, dt \times \frac{\lambda(t)}{\bar{\lambda}} + o(dt) + \mathcal{O}(dt^2) = \lambda(t)\, dt + o(dt).$$

2) le modèle de Merton :

$$X_t^y = \underbrace{y\, e^{\sigma W_t + \mu t}}_{\text{brownien géométrique}} \prod_{j=1}^{N_t} Y_j$$

brownien

indep
- $(W_t)_{t \geq 0}$
- $(N_t)_{t \geq 0}$ processus de Poisson de paramètre λ
- $(Y_j)_{j \geq 1}$ variables aléatoires ind tq $\underline{\mathbb{P}(Y_1 > 0) = 1}$

<u>ex</u> : • $\mathbb{P}(Y_1 = a) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = b)$ avec $0 < a < 1 < b$

permet de modéliser des sauts à la baisse $(Y_j = a)$ et la hausse $(Y_j = b)$.

• Si les Y_j sont des variables aléatoires log-normales la loi condit de X_t^y sachant $N_t = n$ est log-normale (somme sur nb de sauts de formules de type Black_Scholes pour prix des Calls ou Puts)

On peut simuler le modèles de Merton aux temps de saut du processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ ou bien sur une grille déterministe.

dynamique : · en dehors des sauts dynamique de type B&S

$$dX_t^y = X_t^y\left(\sigma dW_t + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt\right).$$

· au l-ième instant de saut T_ℓ du processus de Poisson

$$X^y_{T_\ell} = \underbrace{X^y_{T_\ell^-}}_{\text{limite à gauche en } T_\ell} \times Y_\ell \qquad X^y_{T_\ell} - X^y_{T_\ell^-} = X^y_{T_\ell^-}(Y_\ell - 1)$$

globalement

$$\boxed{dX_t^y = X_t^y\left(\sigma dW_t + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt\right) + X^y_{t^-}(Y_{N_t} - 1)dN_t}$$

3) Équations différentielles stochastiques avec sauts :

$$dX_t = \sigma(t, X_t)\,dW_t + b(t, X_t)\,dt + c(t, X_{t^-}, Y_{N_t})\,dN_t$$

où
- $(W_t)_{t \geq 0}$ brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$
- $(N_t)_{t \geq 0}$ processus de Poisson de paramètre λ
- $(Y_j)_{j \geq 1}$ suite de va iid à valeurs $\mathbb{R}^q$

) indep

$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times d}$

$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$c : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$

Si σ et b satisfont (Lip), en raisonnant entre les sauts du processus de Poisson on peut montrer que l'EDS avec sauts admet une unique solution.

Schéma de discrétisation : $\left(t_\ell = \frac{\ell T}{K}\right)_{0 \leq \ell \leq K}$

$(T_1, \dots, T_{N_T})$ instants de sauts du Poisson avant T.

En regroupant les 2 on obtient une grille croissante.

$(s_\ell)_{0 \leq \ell \leq L = K + N_T}$

$\bar{X}_0 = X_0$

$$\bar{X}_{s_{\ell+1}^-} = \bar{X}_{s_\ell} + \sigma(s_\ell, \bar{X}_{s_\ell})(W_{s_{\ell+1}} - W_{s_\ell}) + b(s_\ell, \bar{X}_{s_\ell})(s_{\ell+1} - s_\ell)$$

↳ Si $s_{\ell+1}$ est de la forme T_j j-ème temps de saut du Poisson

$$\bar{X}_{s_{\ell+1}} = \bar{X}_{s_{\ell+1}^-} + c(s_{\ell+1}, \bar{X}_{s_{\ell+1}^-}, Y_j)$$

↳ Sinon $\bar{X}_{s_{\ell+1}} = \bar{X}_{s_{\ell+1}^-}$

II Processus de Lévy :

Black Scholes $X_t^y = y\, e^{\underbrace{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}_{Z_t}}$

$\left(Z_t = \sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t\right)_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy ou PAIS à trajectoires continues. En fait tout processus de Lévy à trajectoires continues est de la forme $(\sigma W_t + \mu t)_{t \geq 0}$ où (W_t) est un brownien et $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ Pour sortir de B&S, choisir $(Z_t)_{t \geq 0}$ PAIS à trajectoires discontinues

def : On appelle PAIS ou processus de Lévy un processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ à trajectoires continues à droite avec des limites à gauche t.q

1) $Z_0 = 0$
2) pour tout $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ les accroissements $(Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}})_{1 \leq k \leq n}$ sont indep
3) Pour $0 \leq s \leq t$, la loi de $Z_t - Z_s$ est la même que celle de Z_{t-s}

exemples : Brownien, processus de Poisson de paramètre λ.

Si $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un Lévy, $Z_1 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(Z_{\frac{k}{n}} - Z_{\frac{k-1}{n}}\right)}_{\text{variables iid pour } 1\leq k\leq n}$.

ie Z_1 et sa loi sont indéfiniment divisibles au sens de

def : Une va réelle X et sa loi sont dites indéfiniment divisibles si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (X_k^n)_{1\leq k\leq n}$ iid tq

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{k=1}^{n} X_k^n$$

Thm : Pour toute loi indéfiniment divisible, il existe un processus de Lévy $(Z_t)_{t\geq 0}$ unique en loi tq Z_1 est distribuée suivant cette loi indéfiniment divisible.

Prop : Une variable aléatoire X est indéfiniment divisible ssi $\exists ! (\sigma, \mu, \nu)$ mesure de Lévy avec $\sigma \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, ν mesure sur $\mathbb{R}$ tq $\int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2)\, \nu(dx) < +\infty$ et $\nu(\{0\}) = 0$

tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(e^{iuX}) = e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2} + iu\mu + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 - iux \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}}\right) \nu(dx)}$$

Formule de Lévy Khinchine.

NB : • Si $X \sim \mathcal{N}_1(\mu, \sigma^2)$ $\quad \mathbb{E}(e^{iuX}) = e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2} + iu\mu}$

• $$\left| e^{iux} - 1 - iux \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}} \right| \leq \begin{cases} 2 & \text{si } |x| > 1 \\ \frac{|u|^2 |x|^2}{2} & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$$

est bien intég contre ν.

Ainsi si $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un Lévy, $\exists ! (\sigma, \mu, \nu)$ tq

$$\mathbb{E}(e^{iuZ_1}) = e^{\psi(u)} \quad \text{où} \quad \psi(u) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} + iu\mu + \int \left(e^{iux} - 1 - iux \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}}\right) \nu(dx)$$

$$\mathbb{E}\left(e^{iu \sum_{k=1}^{n} (Z_{\frac{k}{n}} - Z_{\frac{k-1}{n}})}\right) = \left(\mathbb{E}(e^{iuZ_{\frac{1}{n}}})\right)^n$$

Ainsi $\mathbb{E}(e^{iuZ_{\frac{1}{n}}}) = e^{\frac{\psi(u)}{n}}$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(e^{iu Z_{\frac{k}{n}}}) = \left(\mathbb{E}(e^{iu Z_{\frac{1}{n}}})\right)^k = e^{\frac{k}{n}\Psi(u)}$.

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, en approchant t par valeurs supérieures par des rationnels et en utilisant la càd de $(Z_t)_{t\geq 0}$ on obtient $\boxed{\mathbb{E}(e^{iuZ_t}) = e^{t\Psi(u)}}$ $= e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}t + iu\mu t} \times e^{t\int_{\mathbb{R}}(e^{iux} - 1 - iux 1_{\{|x|\leq 1\}})\nu(dx)}$

$Z_t = \sigma W_t + \mu t + \bar{Z}_t$ où $(\bar{Z}_t)_{t\geq 0}$ processus de Lévy de sauts pur indep de $(W_t)_{t\geq 0}$ tq $\mathbb{E}(e^{iu\bar{Z}_t}) = e^{t\int_{\mathbb{R}}(e^{iux} - 1 - iux 1_{\{|x|\leq 1\}})\nu(dx)}$

Supposons que $\nu(\mathbb{R}) = \lambda < +\infty$ (et > 0 sinon $\bar{Z}_t = 0 \; \forall t$)

On pose $m = \frac{\nu}{\lambda}$ proba sur $\mathbb{R}$.

Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ processus de Poisson de paramètre λ | indep.

$(\xi_j)_{j\geq 1}$ iid $\sim m$

$$\sum_{j=1}^{N_t} \xi_j - t\int_{[-1,1]} x\,\nu(dx)$$

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\sum_{j=1}^{N_t}\xi_j - t\int_{[-1,1]} x\,\nu(dx)\right)}\right) = e^{-iut\int_{[-1,1]} x\,\nu(dx)}\, \mathbb{E}\left[e^{iu\sum_{j=1}^{N_t}\xi_j}\right]$$

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\sum_{j=1}^{N_t}\xi_j}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\, \underbrace{\mathbb{E}\left(e^{iu\sum_{j=1}^{n}\xi_j}\right)}_{\left(\mathbb{E}(e^{iu\xi_1})\right)^n = \left(\int e^{iux}\, m(dx)\right)^n}$$

$$= e^{\lambda t\int_{\mathbb{R}} e^{iux}\, m(dx) - \lambda t} \overset{\nu=\lambda m}{=} e^{t\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1)\,\nu(dx)}$$

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\sum_{j=1}^{N_t}\xi_j}\right) = e^{t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{iux}-1-iux\,\mathbb{1}_{\{|x|\le 1\}}\right)\nu(dx)}.$$

Ainsi $Z_t = \sum_{j=1}^{N_t}\xi_j - t\int_{[-1,1]} x\,\nu(dx)$ Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ Poisson de paramètre λ

indep de $(\xi_j)_{j\geq 1}$

iid v.a. m.

et $e^{Z_t} = e^{\sigma W_t + \left(\mu - \int_{[-1,1]} x\,\nu(dx)\right)t} \prod_{j=1}^{N_t} \underset{Y_j}{e^{\xi_j}}$.

$\boxed{\text{modèle de Merton.}}$

Pour sortir du modèle de Merton, il faut supposer $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$.
Alors le processus de Lévy a une infinité de sauts sur chaque intervalle de temps de longueur > 0.
La simulation des temps de saut n'a plus de sens.
La simulation sur une grille déterministe reste possible.

1) Processus gamma et variance gamma :

déf : Pour $\alpha, \theta > 0$ on dit que X suit la loi gamma de paramètre (α, θ) et on note $X \sim \Gamma(\alpha, \theta)$ si X possède la densité $\dfrac{\theta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(\alpha)} 1_{\{x>0\}}$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ fonction gamma d'Euler

vérifie $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ si bien qu'avec $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

<u>Propriétés</u> : (1) $\Gamma(1,\theta) = \xi(\theta)$.

- Si $\left.\begin{array}{l} X \sim \Gamma(a,\theta) \\ Y \sim \Gamma(b,\theta) \end{array}\right)$ indep

  pour $\lambda > 0$, $\lambda X \sim \Gamma\left(a, \frac{\theta}{\lambda}\right)$ (2)

  $X+Y \sim \Gamma(a+b,\theta)$. (3)

- $\forall v > -\theta$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{(iu-v)X}\right) = \left(\frac{\theta}{v+\theta-iu}\right)^{a}$ (4)

<u>Simulation $\sim \Gamma(a,\theta)$</u> : il suffit de multiplier une va $\sim \Gamma(a,1)$ par $\frac{1}{\theta}$ d'après (2).

On note $\lfloor a \rfloor$ et $\alpha = a - \lfloor a \rfloor$ la partie entière et la partie fractionnaire de a. Si les $(U_i)_{i \geq 1}$ iid $\sim \mathcal{U}[0,1]$,

$$-\ln \prod_{i=1}^{\lfloor a \rfloor} U_i = \sum_{i=1}^{\lfloor a \rfloor} (\underbrace{-\ln U_i}_{\sim \Gamma(1,1) \text{ d'après (1)}}) \sim \Gamma(\lfloor a \rfloor, 1) \text{ d'après (3)}.$$

Il suffit de rajouter de façon indep $\sim \Gamma(\alpha,1)$

Simulation suivant $\Gamma(\alpha, 1)$ où $0<\alpha<1$:

densité $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} 1_{\{x>0\}} \leq \frac{\alpha+e}{\alpha e \Gamma(\alpha)} \underbrace{\left[\frac{\alpha e}{\alpha+e}\left(x^{\alpha-1} 1_{\{0<x\leq 1\}} + e^{-x} 1_{\{x>1\}}\right)\right]}_{p(x) \text{ densité de proba}}$

reject sous la densité p avec $\frac{\alpha+e}{\alpha e \Gamma(\alpha)} \leq 1{,}39$ tentatives en moyenne avant succès.

simulation suivant p par inversion de la fonction de répartition :

$$F(x) = \frac{e}{\alpha+e} x^{\alpha} 1_{\{0\leq x\leq 1\}} + \underbrace{\left(\frac{e}{\alpha+e} + \frac{\alpha e}{\alpha+e}\left(e^{-1}-e^{-x}\right)\right)}_{1 - \frac{\alpha e}{\alpha+e} e^{-x}} 1_{\{x>1\}}$$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha+e}{e} u\right)^{\frac{1}{\alpha}} & \text{si } u \leq \frac{e}{\alpha+e} \\ -\ln\left(\frac{\alpha+e}{\alpha e}(1-u)\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après (3) $\Gamma(\alpha, \beta)$ est indéfiniment divisible

Donc il existe un processus de Levy $(U_t)_{t \geq 0}$

tq $U_1 \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

$$\mathbb{E}(e^{iu U_t}) = (\mathbb{E}(e^{iu U_1}))^t$$

$$= \left(\frac{\beta}{\beta - iu}\right)^{\alpha t}$$

$$U_t \sim \Gamma(\alpha t, \beta).$$

$U_t \nearrow$

On prend plutôt $Z_t = U_t - D_t$

où $\left\{\begin{array}{l} U_t \text{ processus de Levy } \Gamma(a, \beta) \\ D_t \text{ processus de Lévy } \Gamma(b, \beta) \end{array}\right)$ indep

processus variance gamma.