benjamin.jourdain@enpc.fr chercheur au CERMICS
Coriolis B206

24/11 Metropolis Hastings et comportement en temps long
chaînes de Markov 8h30 → 10h00 puis 10h15 → 11h45

01/12 LGN et TLC ergodiques pour chaînes de Markov
8h30 → 10h00
puis TD informatique MH 10h15 → 11h45

08/12 systèmes de particules en interaction

15/12 Discrétisation d'Equations Différentielles Stochastiques

05/01 Discrétisation d'EDS fin de 8h30 → 10h00
puis TD mise en oeuvre de 10h15 à 11h45

19/01 Discrétisation de processus comportant des sauts

26/01 Examen de 8h30 à 11h30 | Examen /16

Projet /4
Rapport : - partie théorique
- graphiques commentés
résultats simulations

# ch I Algorithme de Metropolis Hastings et convergence de chaînes de Markov

## I noyau markovien et chaîne de Markov :

$E$ espace d'états muni d'une tribu $\mathcal{E}$

def : · On appelle noyau markovien sur $(E, \mathcal{E})$ une application $P : E \times \mathcal{E} \to [0,1]$ tq

1) $\forall x \in E$, $P(x, \cdot)$ est une proba sur $(E, \mathcal{E})$
2) $\forall A \in \mathcal{E}$, $x \to P(x, A)$ est mesurable

· On appelle chaîne de Markov de noyau $P$ un processus $(X_n)_{n \geq 0}$ adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid \mathcal{F}_n) = P(X_n, A)$

Notations :

- Si $\mu \in \mathcal{P}(E)$ (probas sur $E$) et $P$ un noyau markovien
on note $\mu P$ la proba sur $(E,\xi)$ définie par
$$\forall A \in \xi \quad \mu P(A) = \int_E P(x,A)\,\mu(dx)$$
- $\mu$ est dite invariante par $P$ si $\mu P = \mu$
- pour $\varphi : E \to \mathbb{R}$ mesurable positive ou | bornée / intégrable $/\mu$
on note $\mu(\varphi) = \int_E \varphi(x)\,\mu(dx)$.
- On note $P\varphi$ la fonction définie par $\forall x \in E$
$$P\varphi(x) = \int_{y\in E} \varphi(y)\,P(x,dy)$$
lorsque $\varphi \geq 0$ ou bien $\int_E |\varphi(y)|\,P(x,dy) < \infty$.
- si $P$ et $Q$ 2 noyaux, on note $PQ$ le noyau déf par
$$PQ(x,A) = \int_{y\in E} Q(y,A)\,P(x,dy)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $P^n$ est le noyau défini par récurrence en posant $P^n = PP^{n-1} = P^{n-1}P$

$P^0(x,A) = \delta_x(A)$

Exo : Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de noyau $P$ et $X_0 \sim \mu$ alors $X_n \sim \mu P^n$

indication : mq $\mathbb{E}(\varphi(X_{k+1}) | \mathcal{F}_k) = P\varphi(X_k)$ pour $\varphi$ mes bornée

## II Algorithme de Metropolis Hastings :

objectif : simuler suivant proba $\pi(dx) = \dfrac{\eta(x)\lambda(dx)}{\int_E \eta(y)\lambda(dy)}$ où

- $\lambda$ est une mesure $\geq 0$ de référence sur $(E, \xi)$
- $\eta : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable tq $0 < \int_E \eta(y)\lambda(dy) < +\infty$.

PAS BESOIN de connaître $\int_E \eta(y)\lambda(dy)$ pour simuler suivant $\pi$

Exemples : • physique statistique : $E = \mathbb{R}^d$ muni de la tribu boréliennne et de la mesure de Lebesgue $\lambda(dx) = dx$.

$V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ fonction potentiel

$\eta(x) = e^{-\frac{V(x)}{k_B T}}$ où $k_B$ constante de Boltzmann et $T$ temperature

$d \gg 1$

Calcul de $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{V(x)}{k_B T}}$ dx compliqué

• statistiques bayésiennes : on cherche un paramètre $\theta \in E$

$P_{Y|\Theta}(y|\theta)$ densité condit de l'observation $Y$ sachant paramètre $\theta$

$p(\theta)$ la densité a priori de $\Theta$.

Bayes : densité à posteriori du paramètre sachant que l'a observé $y$ est

$$\frac{P_{Y|\Theta}(y|\theta)\, p(\theta)}{\int_E P_{Y|\Theta}(y|\tilde{\theta})\, p(\tilde{\theta})\, \lambda(d\tilde{\theta})}$$

<u>Ingrédients</u> : • Soit $q : E \times E \to \mathbb{R}_+$ mesurable tq $\forall x \in E$

$$\int q(x,y)\, \lambda(dy) = 1 \Rightarrow Q(x,dy) = q(x,y)\,\lambda(dy)$$ noyau markovien

$y \in E$ On suppose que l'on sait simuler suivant $Q$.

• $$\alpha(x,y) = \begin{cases} \min\left(\dfrac{\eta(y)\, q(y,x)}{\eta(x)\, q(x,y)}, 1\right) & \text{si } \eta(x)\, q(x,y) \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partant de $X_0$ v.a. à valeurs dans $E$, on construit par récurrence $(X_n)_{n\geq 0}$ avec passage de $n$ à $n+1$ en

- simulant une proposition $Y_{n+1} \sim q(X_n, y)\lambda(dy)$ sachant $(X_0, \dots, X_n)$
- simulant indep $U_{n+1} \sim \mathcal{U}[0,1]$.

$$X_{n+1} = Y_{n+1} \mathbb{1}_{\{U_{n+1} \leq \alpha(X_n, Y_{n+1})\}} + X_n \mathbb{1}_{\{U_{n+1} > \alpha(X_n, Y_{n+1})\}}$$

Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée

$$\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1}) \mid \underbrace{(X_0, \dots, X_n)}_{X_{0:n}}) = \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1}) \mid (X_{0:n}, Y_{n+1}))}_{\varphi(Y_{n+1})\alpha(X_n, Y_{n+1}) + \varphi(X_n)(1-\alpha(X_n, Y_{n+1}))} \mid X_{0:n})$$

$$= \int \varphi(y)\, \alpha(X_n, y)\, q(X_n, y)\, \lambda(dy) + \varphi(X_n) \int (1-\alpha(X_n, y))\, \lambda(dy).$$

$(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de noyau

$$\boxed{P(x, dy) = \alpha(x,y)\, q(x,y)\, \lambda(dy) + R(x)\, \delta_x(dy)} \text{ où } R(x) = \int (1-\alpha(x,y))\, \lambda(dy)$$

$\boxed{\pi \text{ est réversible pour } P}$ $\quad \underbrace{\pi(dx)\,P(x,dy)}_{\in \mathcal{P}(E\times E)} = \pi(dy)\,P(y,dx) \quad (*)$

$\Rightarrow$ $\pi$ invariante par $P$ ie $\pi P = \pi$

par intégration de $(*)$ en $x \in E$ et en utilisant $P(y,E) = 1$

$$\pi P(dy) = \pi(dy)$$

Montrons que $\pi$ réversible

$$\eta(x)\,\alpha(x,y)\,q(x,y) = \begin{cases} \eta(x)\,q(x,y) \times \min\left(\dfrac{\eta(y)\,q(y,x)}{\eta(x)\,q(x,y)}, 1\right) & \text{si } \eta(x)q(x,y) > 0 \\ \eta(x)\,q(x,y) \times 1 & \text{si } \eta(x)\,q(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$= \min\big(\eta(y)q(y,x),\ \eta(x)\,q(y,x)\big) \quad \text{fonction symétrique de } (x,y).$$

$$= \eta(y)\,\alpha(y,x)\,q(y,x)$$

$$\underbrace{\eta(x)\lambda(dx)}_{\pi(dx)}\ \underbrace{\alpha(x,y)\,q(x,y)\,\lambda(dy)}_{\text{première partie de } P(x,dy)} = \eta(y)\,\alpha(y,x)\,q(y,x)\,\lambda(dx)\,\lambda(dy)$$

$$\eta(x)\,\lambda(dx)\,R(x)\,\delta_x(dy) = \eta(y)\,\lambda(dy)\,R(y)\,\delta_y(dx)$$

En sommant, on obtient $\pi(dx)\,P(x,dy) = \pi(dy)\,P(y,dx)$.

Objectifs : • trouver des conditions sur le noyau $P$ d'une chaîne de Markov qui assurent que la loi de $X_n$ tend vers l'unique proba $\pi$ invariante par $P$ lorsque $n \to +\infty$

• trouver des conditions qui assurent alors que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(X_k) \longrightarrow \pi(\varphi) \quad \text{p.s.} \qquad \text{LGN ergodique}$$

et

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(X_k) - \pi(\varphi) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \qquad \text{TLC}$$

NB : la reversibilité est préservée si on remplace $\alpha(x,y)$ par $a\left( \frac{\eta(y)\, q(y,x)}{\eta(x)\, q(x,y)} \right)$ où $a : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ vérifie $a(0) = 0$ et $a(u) = u\, a\left(\frac{1}{u}\right)$ pour $u \in ]0,1]$

Metropolis Hastings $\to$ $a(u) = \min(u, 1)$ choix maximal qui minimise $\sigma^2$

Autres choix possibles comme $a(u) = \frac{u}{1+u}$ (Barker)

# III Ergodicité d'une chaîne de Markov à espace d'état général

## 1) distance en variation totale :

<u>def</u> : Pour $\mu, \sigma \in \mathcal{P}(E)$ on note $d_{TV}(\mu,\sigma) = \sup_{A \in \xi} |\mu(A) - \sigma(A)|$

<u>exo</u> : vérifier que distance.

décomposition de Jordan Hahn : $\mu - \sigma = \xi_+ - \xi_-$ <u>avec $\xi_+$ et $\xi_-$ mesures $\geq 0$</u> où $\exists B \in \xi$

tq $\xi_-(B) = \xi_+(B^c) = 0$ (voir exo des poly pour construction)

<u>Prop</u> : On note $\mu \wedge \sigma$ la plus grande mesure sur $(E, \xi)$ majorée à la fois par $\mu$ et par $\sigma$ $(\forall A \in \xi, \mu\wedge\sigma(A) \leq \mu(A) \wedge \sigma(A))$

Elle est donnée par $\mu \wedge \sigma(A) = \mu(A \cap B^c) + \sigma(A \cap B)$

On a $\boxed{d_{TV}(\mu,\sigma) = 1 - \mu\wedge\sigma(E) = \sup_{|\varphi| \leq \frac{1}{2}} |\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)|}$

où le supremum porte sur les fonctions $\varphi : E \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mesurables.

<u>NB</u> : En dehors des cas $A \subset B$ ou $A \subset B^c$, en général $\mu\wedge\sigma(A) < \mu(A) \wedge \sigma(A)$

Preuve : $(*)\ \mu(A) - \sigma(A) = \xi_+(A) - \xi_-(A) = \xi_+(A\cap B) - \xi_-(A\cap B^c)$

Si $A \subset B$, $\mu(A) - \sigma(A) = \xi_+(A) \geq 0$ $\quad \mu(A) \geq \sigma(A)$

Si $A \subset B^c$ $\mu(A) - \sigma(A) = -\xi_-(A) \leq 0$ $\quad \mu(A) \leq \sigma(A)$

$$\underbrace{\mu(A\cap B^c)}_{\leq \sigma(A\cap B^c)} + \underbrace{\sigma(A\cap B)}_{\leq \mu(A\cap B)} \leq \sigma(A) \wedge \mu(A)$$

Soit maintenant $\eta$ mesure majorée par $\mu$ et $\sigma$

$\eta(A) = \eta(A\cap B^c) + \eta(A\cap B) \leq \mu(A\cap B^c) + \sigma(A\cap B) = \mu\wedge\sigma(A)$

$\mu\wedge\sigma$ est bien la plus grande mesure majorée à la fois par $\mu$ et par $\sigma$.

$A = E$ dans $(*)$ $\quad 0 = 1 - 1 = \xi_+(E) - \xi_-(E) = \xi_+(B) - \xi_-(B^c)$

$$\underbrace{-\xi_-(A)}_{\text{minimal pour } A = B^c} \leq \mu(A) - \sigma(A) \leq \underbrace{\xi_+(A)}_{\text{maximal pour } A = B}$$

$$d_{TV}(\mu,\sigma) = \sup_{A\in\mathcal{F}} |\mu(A) - \sigma(A)| = \xi_+(B) = \xi_-(B^c)$$

$$d_{TV}(\mu,\sigma) = \xi_+(B) - \xi_-(B) = \mu(B) - \sigma(B)$$

$$= 1 - \Big(\underbrace{\mu(B^c) + \sigma(B)}_{\underbrace{\mu(E\cap B^c) + \sigma(E\cap B)}_{\mu\wedge\sigma(E)}}\Big)$$

Soit $\varphi : E \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mesurable

$$\mu(\varphi) - \sigma(\varphi) = \xi_+(\varphi) - \xi_-(\varphi)$$

$\xi_+(\varphi)$ est maximal pour $\varphi = \frac{1}{2}$ sur $B$ et $\xi_-(\varphi)$ minimal pour $\varphi = -\frac{1}{2}$ sur $B^c$ $\longrightarrow$ $\varphi = 1_B - \frac{1}{2}$

$$\sup_{|\varphi|\leq\frac{1}{2}} \big(\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)\big) = \mu\left(1_B - \tfrac{1}{2}\right) - \sigma\left(1_B - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \mu(B) - \sigma(B) = \xi_+(B) = d_{TV}(\mu,\sigma)$$

$$\inf_{|\varphi|\leq\frac{1}{2}} \big(\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)\big) = -\xi_-(B^c)$$ par symétrie $\blacksquare$

__Interprétation de $d_{TV}$ en termes de couplages :__

$$d_{TV}(\mu,\nu) = \inf_{(X,Y) \text{ avec } \substack{X\sim\mu \\ Y\sim\nu}} \mathbb{P}(X\neq Y)$$

__Proposition :__ L'espace $\mathcal{P}(E)$ muni de $d_{TV}$ est complet

__Preuve :__ Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{P}(E)$ pour $d_{TV}$

On pose $\mu = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu_n}{2^n} \in \mathcal{P}(E)$

$\forall n$, $\mu_n \ll \mu$ et admet une densité $p_n : E \to \mathbb{R}_+$ tq $\int_E p_n(x)\,\mu(dx) = 1$ par rapport à $\mu$ : $\mu_n(dx) = p_n(x)\,\mu(dx)$.

$$d_{TV}(\mu_n,\mu_m) = \sup_{|\varphi|\leq \frac{1}{2}} |\mu_n(\varphi)-\mu_m(\varphi)| = \sup_{|\varphi|\leq\frac{1}{2}} \left|\int_E \varphi(x)\,(p_n(x)-p_m(x))\,\mu(dx)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\int_E |p_n(x)-p_m(x)|\,\mu(dx) = \frac{1}{2}\|p_n-p_m\|_{L^1(\mu)}$$

$\varphi = \frac{1}{2}\,\text{signe}(p_n(x)-p_m(x))$

$L^1(\mu)$ est complet

Ainsi $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de $L^1(\mu)$ qui est complet. Elle converge vers une limite $p_\infty$ !

$$\left| \int_E p_\infty(x)\,\mu(dx) - \underbrace{\int_E p_n(x)\,\mu(dx)}_{1} \right| \leq \| p_\infty - p_n \|_{L^1(\mu)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\int_E p_\infty(x)\,\mu(dx) = 1$.

$$\max(-p_\infty(x), 0) \leq |\underbrace{p_n(x)}_{\geq 0} - p_\infty(x)| \qquad \mu(dx) \text{ p.p.}$$

$$\int \max(-p_\infty(x), 0)\,\mu(dx) \leq \| p_n - p_\infty \|_{L^1(\mu)} \to 0.$$

$p_\infty(x) \geq 0$ $\mu(dx)$ p.p $\Rightarrow$ $p_\infty$ densité de proba et $\mu_\infty(dx) = p_\infty(x)\,\mu(dx) \in \mathcal{P}(E)$.

En reprenant le calcul de $d_{TV}(\mu_n, \mu_m)$ on a

$$d_{TV}(\mu_n, \mu_\infty) = \frac{1}{2} \| p_n - p_\infty \|_{L^1(\mu)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_\infty$ en variation totale. $\boxtimes$

reprise 10h25

## 2) Condition de Doeblin et ergodicité uniforme :

<u>def</u> : On dit que le noyau $P$ satisfait la condition de Doeblin si $\exists \alpha > 0$, $\forall x, y \in E$, $P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)(E) \geq \alpha$

i.e. $d_{TV}(P(x,\cdot), P(y,\cdot)) \leq 1-\alpha$

la condition de Doeblin unif si $\exists \nu \in \mathcal{P}(E)$, $\alpha > 0$, $\forall x \in E$, $P(x,\cdot) \geq \alpha \nu(\cdot)$

i.e. $\forall A \in \mathcal{E}$ $P(x,A) \geq \alpha \nu(A)$

<u>NB</u> : Doeblin unif $\Rightarrow$ $\forall x, y \in E$ $P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot) \geq \alpha \nu(\cdot)$

$\Rightarrow$ Doeblin est vraie

<u>Thm</u> : Si $P$ satisfait Doeblin alors il admet une unique proba invariante $\pi$ et

$\forall \mu \in \mathcal{P}(E)$, $d_{TV}(\mu P^n, \pi) \leq (1-\alpha)^n \underbrace{d_{TV}(\mu, \pi)}_{\leq 1}$

$d_{TV}(\mu P^n, \sigma P^n) \leq (1-\alpha)^n d_{TV}(\mu, \sigma)$

Convergence à vitesse géométrique de la loi $\mu P^n$ de $(X_n)_{n \geq 0}$ si $X_0 \sim \mu$ vers $\pi$

NB : Supposons qu'une itérée $P^m$ de $P$ satisfait Doeblin
$m \geq 1$

En appliquant le thm, on obtient que $P^m$ admet une unique proba invariante $\pi$.

$$\pi P^{m+1} = \underbrace{\pi P^m}_{\pi} P = \pi P P^m \quad \text{donc } \pi P \text{ invariante par } P^m$$

Comme $\pi$ unique proba invariante par $P^m$, $\pi P = \pi$ et $\pi$ invariante par $P$. Comme toute proba invariante par $P$ est invariante par $P^m$, $\pi$ est l'unique proba invariante par $P$.

$$d_{TV}(\mu P, \sigma P) = \sup_{|\varphi| \leq \frac{1}{2}} |\mu P(\varphi) - \sigma P(\varphi)| = \sup_{|\varphi| \leq \frac{1}{2}} |\mu(\underbrace{P\varphi}_{}) - \sigma(P\varphi)|$$

bornée par $\frac{1}{2}$

$$|P\varphi(x)| \leq \int |\varphi(y)| P(x, dy) \leq \frac{1}{2}$$

$$\leq \sup_{|\psi| \leq \frac{1}{2}} |\mu(\psi) - \sigma(\psi)| = d_{TV}(\mu, \sigma)$$

$$d_{TV}(\mu P^n, \sigma P^n) = d_{TV}\left(\mu P^{n - m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + \underbrace{m \lfloor \frac{n}{m} \rfloor}_{}}, \sigma P^{n - m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + \underbrace{m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}_{}}\right)$$

$$\leq (1-\alpha)^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} d_{TV}\left(\mu P^{n - m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}, \sigma P^{n - m \lfloor \frac{n}{m} \rfloor}\right) \leq (1-\alpha)^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} d_{TV}(\mu, \sigma)$$

Pour $\sigma = \pi$, $d_{TV}(\mu P^n, \pi) \leq (1-\alpha)^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} d_{TV}(\mu, \pi)$

Pour $\mu = \delta_x$, $\mu P^n(A) = P^n(x, A)$

$$\sup_{x \in E} d_{TV}(P^n(x,\cdot), \pi) \leq (1-\alpha)^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

propriété dite d'ergodicité uniforme.

Réciproquement si ergodicité unif : $\exists \pi \in \mathcal{P}(E)$ tq

$$\sup_{x \in E} d_{TV}(P^n(x,\cdot), \pi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

alors on choisit $n$ assez gd pour que

$$\sup_{x \in E} d_{TV}(P^n(x,\cdot), \pi) \leq \frac{1-\alpha}{2}$$

et on a $d_{TV}(P^n(x,\cdot), P^n(y,\cdot)) \leq d_{TV}(P^n(x,\cdot), \pi) + d_{TV}(\pi, P^n(y,\cdot))$

$\leq 1-\alpha$

Doeblin pour itérée $P^n$ de $P$. ergodicité unif $\iff$ Doeblin pour itérée de $P$.

NB : Pour $\beta > 0$

$$\sup_{|\varphi| \leq \beta} |\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)| = 2\beta \sup_{|\varphi| \leq \beta} \left|\mu\left(\frac{\varphi}{2\beta}\right) - \sigma\left(\frac{\varphi}{2\beta}\right)\right|$$

$$= 2\beta \, d_{TV}(\mu, \sigma).$$

Lemme : Sous Doeblin, $\forall x, y \in E \quad |P\varphi(x) - P\varphi(y)| \leq 2(1-\alpha) \sup_{z \in E} |\varphi(z)|$

Et $d_{TV}(\mu P, \sigma P) \leq (1-\alpha) \, d_{TV}(\mu, \sigma)$.

Preuve :

$$|P\varphi(x) - P\varphi(y)| = \left| P\varphi(x) - \int \varphi(z) \, P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)(dz) + \int \varphi(z) \, P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot) \, dz - P\varphi(y) \right|$$

$$\leq \left| \int \varphi(z) \underbrace{\left(P(x,\cdot) - P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)\right)}_{\text{mesure} \geq 0}(dz) \right| + \left| \int \varphi(z) \left(P(y,\cdot) - P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)\right)(dz) \right|$$

$$\leq 2 \sup_{z \in E} |\varphi(z)| \left( \underbrace{P(x, E)}_{1} - \underbrace{P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)(E)}_{\geq \alpha \text{ Doeblin}} \right)$$

Soit $c_\varphi = (1-\alpha) \sup_{z \in E} |\varphi(z)| - \sup_{y \in E} P\varphi(y)$

$$P\varphi(x) + c_\varphi \leq \cancel{P\varphi(x)} + (1-\alpha) \sup_{z \in E} |\varphi(z)| - \cancel{P\varphi(x)}$$

$$P\varphi(x) + c_\varphi = (1-\alpha)\sup_{z\in E}|\varphi(z)| + \underbrace{\inf_{y\in E}\left(P\varphi(x) - P\varphi(y)\right)}_{\geq -2(1-\alpha)\sup_{z\in E}|\varphi(z)|}$$

$$\geq -(1-\alpha)\sup_{z\in E}|\varphi(z)|$$

$$\sup_{x\in E}|P\varphi(x) + c_\varphi| \leq (1-\alpha)\sup_{z\in E}|\varphi(z)|.$$

Choisissons $\varphi : E \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mesurable.

$$d_{TV}(\mu P, \sigma P) = \sup_{|\varphi|\leq\frac{1}{2}} \Big|\underbrace{\mu P(\varphi)}_{\mu(P\varphi)} - \underbrace{\sigma P(\varphi)}_{\sigma(P\varphi)}\Big| = \sup_{|\varphi|\leq\frac{1}{2}} |\mu(P\varphi + c_\varphi) - \sigma(P\varphi + c_\varphi)|$$

$$\leq \sup_{|\varphi|\leq\frac{1-\alpha}{2}} |\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)| \overset{\text{N.B.}}{=} \cancel{2}\frac{(1-\alpha)}{\cancel{2}} d_{TV}(\mu,\sigma) \blacksquare$$

<u>preuve du théorème</u> : $\mathcal{P}(E) \ni \mu \longmapsto \mu P$ est une contraction de l'espace complet $\mathcal{P}(E)$ sur lui-même. Par point fixe de Picard elle admet un unique point fixe $\pi$. Être un point fixe est équivalent à être invariant par $P$. Donc $\pi$ est l'unique proba invariante par $P$. En itérant le lemme, il vient $d_{TV}(\mu P^n, \sigma P^n) \leq (1-\alpha)^n d_{TV}(\mu,\sigma)$.

$\sigma = \pi$

3) Ergodicité géométrique sous condition de dérive :

(D1) $\exists\, V : E \to \mathbb{R}_+$ mes $\exists\, \gamma \in [0,1[$, $\exists\, K \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in E$, $PV(x) \leq \gamma V(x) + K$

(D2) $\exists\, R > \dfrac{2K}{1-\gamma}$, $\exists\, \alpha \in ]0,1]$, $\forall x,y \in E$ tq $V(x)+V(y) \leq R$,
$P(x,\cdot) \wedge P(y,\cdot)(E) \geq \alpha$

V : fonction de Lyapunov

NB : "Doeblin est satisfait" sur $\{x : V(x) \leq \frac{R}{2}\}$.

Si $V(x) \geq \frac{R}{2}$, comme $K < \frac{(1-\gamma)R}{2} < (1-\gamma)V(x)$, $PV(x) < \gamma V(x) + 1-\gamma\, V(x) = V(x)$

Appliquer P rapproche de l'ensemble où "Doeblin est satisfait"

Approche de Hairer & Mattingly

déf : • Pour $\beta \geq 0$, on note $\| \ \|_\beta$ la norme sur l'ensemble des fonctions $\varphi : E \to \mathbb{R}$ mesurables tq $\sup_{x\in E} \frac{|\varphi(x)|}{1+\beta V(x)} < +\infty$

déf par $\|\varphi\|_\beta = \sup_{x\in E} \frac{|\varphi(x)|}{1+\beta V(x)}$.

• $d_\beta(\mu,\sigma) = \sup_{\|\varphi\|_\beta \leq 1} |\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)|$. distance sur $\{\mu \in \mathcal{P}(E) \text{ tq } \beta\mu(V) < +\infty\}$

NB : $d_0$ ? $\|\varphi\|_0 = \sup_{x\in E} |\varphi(x)|$

$d_0(\mu,\sigma) = \sup_{|\varphi|\leq 1} |\mu(\varphi) - \sigma(\varphi)| = 2\, d_{TV}(\mu,\sigma)$.

Pour $0 \leq \beta' \leq \beta$, $d_{\beta'}(\mu,\sigma) \leq d_\beta(\mu,\sigma)$

Car $\|\varphi\|_{\beta'} \geq \|\varphi\|_\beta$.

**Prop :** Pour $\beta > 0$, $\mathcal{P}_V(E) = \{\mu \in \mathcal{P}(E) \text{ tq } \mu(V) < +\infty\}$.
muni de $d_\beta$ est complet

**Preuve :** On reprend la preuve pour $d_{TV}$ en remarquant
que $d_\beta(\mu_n, \mu_m) = \|\rho_n - \rho_m\|_{L^1((1+\beta V)\mu)}$.

**Thm :** On suppose que $P$ satisfait (D1) et (D2).
Alors il admet une unique proba invariante $\pi$.
En outre $\pi(V) \leq \dfrac{K}{1-\gamma}$ et
$\forall \beta > 0, \forall \mu \in \mathcal{P}(E), \forall n \in \mathbb{N}, d_\beta(\mu P^n, \pi) \leq \chi^n d_\beta(\mu, \pi)$
où $\chi = (1 - \alpha + \beta K) \vee \underbrace{\dfrac{2 + \beta\gamma R + 2\beta K}{2 + \beta R}}_{f(R)} \in \,]0,1[$ si $\beta < \dfrac{\alpha}{K}$

Lemme : Sous (D1) et (D2) $\forall \varphi$ tq $\sup_{x\in E} \frac{|\varphi(x)|}{1+V(x)} < +\infty$,

$$\forall x,y \in E \quad |P\varphi(x) - P\varphi(y)| \leq \alpha\,(2+\beta(V(x)+V(y)))\,\|\varphi\|_\beta$$

$$\forall \mu,\sigma \in \mathcal{P}(E) \quad d_\beta(\mu P, \sigma P) \leq \alpha\, d_\beta(\mu,\sigma)$$

Preuve :

Cas 1 : $V(x)+V(y) > R$

$$|P\varphi(x) - P\varphi(y)| \leq P|\varphi|(x) + P|\varphi|(y)$$

$$\leq \|\varphi\|_\beta \left(P(1+\beta V)(x) + P(1+\beta V)(y)\right)$$

$$\overset{D1}{\leq} \|\varphi\|_\beta \left(2+\beta\gamma(V(x)+V(y)) + 2\beta K\right)$$

$$= \|\varphi\|_\beta \left(2+\beta(V(x)+V(y))\right) \times \frac{2+\beta\gamma(V(x)+V(y))+2\beta K}{2+\beta(V(x)+V(y))}$$

Pour $r \geq 0$

Soit $f(r) = \frac{2+\beta\gamma r + 2\beta K}{2+\beta r} = \gamma + \frac{2(1-\gamma)+2\beta K}{2+\beta r} \searrow \xrightarrow[r\to+\infty]{} \gamma$

$$\leq f(R)\,(2+\beta(V(x)+V(y)))\,\|\varphi\|_\beta \qquad f(R) = \frac{2+\beta\gamma R + 2\beta K}{2+\beta R} < 1$$

car $K < \frac{R}{2}(1-\gamma)$

cas 2 : $V(x)+V(y)\leq R$

$$|P\varphi(x)-P\varphi(y)| \overset{(D2)}{\leq} \int_E |\varphi(z)|\,\big(P(x,\cdot)-P(x,\cdot)\wedge P(y,\cdot)\big)(dz)+\int_E |\varphi(z)|\big(P(y,\cdot)-P(x,\cdot)\wedge P(y,\cdot)\big)(dz)$$

$$\leq \|\varphi\|_\beta \Big\{\int_E (1+\beta V(z))\,\big(P(x,\cdot)-P(x,\cdot)\wedge P(y,\cdot)\big)(dz)+\int (1+\beta V(z))\,\big(P(y,\cdot)-P(x,\cdot)\wedge P(y,\cdot)\big)(dz)\Big\}$$

$$\leq \|\varphi\|_\beta\,\big(2(1-\alpha)+\beta PV(x)+\beta PV(y)\big)$$

$$\overset{(D1)}{\leq} \|\varphi\|_\beta\,\big(2(1-\alpha)+2\beta K+\beta\gamma(V(x)+V(y))\big)$$

$$\leq (1-\alpha+\beta K)\vee\underbrace{\gamma}_{f(+\infty)\leq f(R)}\big(2+\beta(V(x)+V(y))\big)\;\|\varphi\|_\beta$$

Synthèse

$$|P\varphi(x)-P\varphi(y)|\leq \chi\,\big(2+\beta(V(x)+V(y))\big)\,\|\varphi\|_\beta$$

où $\chi=(1-\alpha+\beta\cancel{K})\vee f(R)$

$$c_\varphi = \inf_{y\in E} \left( \chi(1+\beta V(y)) - P\varphi(y) \right)$$ On suppose $\|\varphi\|_\beta \leq 1$.

$$P\varphi(x) + c_\varphi \leq \cancel{P\varphi(x)} + \chi(1+\beta V(x)) - \cancel{P\varphi(x)}$$

$$P\varphi(x) + c_\varphi \geq \inf_{y\in E} \left( \underbrace{P\varphi(x) - P\varphi(y)}_{\geq -\chi(2+\beta(V(x)+V(y)))} + \chi(1+\beta V(y)) \right)$$ d'après 1ère assertion

$$\geq -\chi(1+\beta V(x))$$

$$\|P\varphi + c_\varphi\|_\beta \leq \chi$$

$$d_\beta(\mu P, \sigma P) = \sup_{\|\varphi\|_\beta\leq 1} |\mu(P\varphi) - \sigma(P\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|_\beta\leq 1} |\mu(P\varphi + c_\varphi) - \sigma(P\varphi + c_\varphi)|$$

$$\leq \sup_{\|\psi\|_\beta\leq \chi} |\mu(\psi) - \sigma(\psi)| \leq \chi\, d_\beta(\mu,\sigma). \quad \blacksquare$$

Preuve du thm : On choisit $\beta < \frac{\alpha}{K}$ de telle sorte que $1-\alpha+\beta K < 1$ et comme $f(R) < 1$, $\chi < 1$.

$\mathcal{P}_V(E) \ni \mu \longrightarrow \mu P$ est une contraction d'après le lemme. Elle admet un unique point fixe $\pi$. $\pi$ est invariante.

$d_\beta(\mu P^n, \pi) \le \chi^n d_\beta(\mu, \pi)$ en itérant le lemme

$$\mu(PV) \overset{(D1)}{\le} \mu(\gamma V + K) = \gamma \mu(V) + K$$

pour $\mu = \pi$, $\pi(V) \le \gamma \pi(V) + K$ i.e. $\pi(V) \le \frac{K}{1-\gamma}$.

Soit $\tilde{\pi} \in \mathcal{P}(E)$ tq $\tilde{\pi} P = \tilde{\pi}$. $d_\beta(\delta_x, \pi) < +\infty$ car $\delta_x \in \mathcal{P}_V(E)$. donc $d_\beta(\underbrace{P^n(x,\cdot)}_{\delta_x P^n}, \pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Comme $d_\beta \ge d_0 = 2 d_{TV}$ $\forall x \in E$ $d_{TV}(P^n(x,\cdot), \pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Soit $A \in \mathcal{E}$, $\tilde{\pi}(A) = \tilde{\pi} P^n(A) = \int_E P^n(x, A)\, \tilde{\pi}(dx) \xrightarrow[CVD]{n\to+\infty} \int_E \pi(A)\, \tilde{\pi}(dx) = \pi(A)$

Donc $\pi$ unique proba invariante