Méthodes de Monte-Carlo

Examen du mardi 17 janvier 2023 8h30-11h30

1 Estimateur de la CVAR

On suppose que le risque d'un portefeuille financier est donné par une variable aléatoire X de carré intégrable. Pour $\alpha \in]0,1[$, on suppose que l'on connaît un seuil x_α t.q. $\mathbb{P}(X \geq x_\alpha) = \alpha$ et on veut calculer la Conditional Value At Risk d'ordre α du portefeuille

$$\text{CVAR}_\alpha = \frac{\mathbb{E}[X 1_{\{X \geq x_\alpha\}}]}{\alpha}.$$

On se donne $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite i.i.d. suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $N_n = \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j \geq x_\alpha\}}$ et on s'intéresse à l'estimateur

$$C_n = 1_{\{N_n \geq 1\}} \frac{1}{N_n} \sum_{j=1}^n X_j 1_{\{X_j \geq x_\alpha\}}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} C_n = \text{CVAR}_\alpha) = 1$.
2. On s'intéresse maintenant au biais de l'estimateur C_n.
   (a) Quelle est la loi de N_n?
   (b) Pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, justifier que
   $$\mathbb{E}[C_n | N_n = k] = \frac{n}{k\mathbb{P}(N_n = k)} \mathbb{E}[X_n 1_{\{X_n \geq x_\alpha\}} 1_{\{N_{n-1} = k-1\}}]$$
   et en déduire que $\mathbb{E}[C_n | N_n = k] = \text{CVAR}_\alpha$.
   (c) Conclure que $\mathbb{E}[C_n] = (1 - (1-\alpha)^n) \times \text{CVAR}_\alpha$.
3. Vérifier que $\hat{C}_n = \frac{1}{n\alpha} \sum_{j=1}^n X_j 1_{\{X_j \geq x_\alpha\}}$ est un estimateur sans biais de CVAR_α qui converge presque sûrement et donner le comportement asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{C}_n - \text{CVAR}_\alpha)$ lorsque $n \to \infty$.
4. On s'intéresse enfin à la variance asymptotique de C_n. Pour cela, on se place dans un cadre un peu plus général et on considère $R_n = 1_{\{S_n \neq 0\}} \frac{\sum_{j=1}^n f(X_j)}{S_n}$ où $S_n = \sum_{j=1}^n g(X_j)$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables telles que $\mathbb{E}[f^2(X) + g^2(X)] < \infty$ et $\mathbb{E}[g(X)] \neq 0$.
   (a) Remarquer que
   $$\sqrt{n}\left(R_n - \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{\mathbb{E}[g(X)]}\right) = \frac{1_{\{S_n \neq 0\}}}{\mathbb{E}[g(X)] S_n/n} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^n (\mathbb{E}[g(X)] f(X_j) - \mathbb{E}[f(X)] g(X_j))\right) - \sqrt{n} 1_{\{S_n = 0\}} \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{\mathbb{E}[g(X)]}.$$
   Montrer que $\sqrt{n} 1_{\{S_n=0\}} \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{\mathbb{E}[g(X)]}$ converge en presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$ et en déduire que $\sqrt{n}\left(R_n - \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{\mathbb{E}[g(X)]}\right)$ converge en loi vers $G \sim \mathcal{N}_1\left(0, \frac{\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[g(X)]f(X) - \mathbb{E}[f(X)]g(X))^2\right]}{(\mathbb{E}[g(X)])^4}\right)$.

(b) En déduire que la variance asymptotique de $\sqrt{n}(C_n - \mathrm{CVAR}_\alpha)$ est égale à $\frac{\mathrm{Var}\left(X1_{\{X\geq x_\alpha\}}\right)}{\alpha^2} - \frac{(1-\alpha)\mathrm{CVAR}_\alpha^2}{\alpha}$. En quoi, malgré son caractère biaisé, cet estimateur est-il plus précis que $\hat{C}_n$?

On suppose plus généralement que $\mathbb{E}[f(X)g(X)] = \mathbb{E}[f(X)]$.

(c) Vérifier que la variance asymptotique de $\sqrt{n}\left(R_n - \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{\mathbb{E}[g(X)]}\right)$ est alors égale à

$$\frac{\mathrm{Var}\ (f(X))}{(\mathbb{E}[g(X)])^2} - \frac{2\mathbb{E}[g(X)] - \mathbb{E}[g^2(X)] - (\mathbb{E}[g(X)])^2}{(\mathbb{E}[g(X)])^4}(\mathbb{E}[f(X)])^2.$$

En déduire que si g est à valeurs dans $[0,1]$, elle est plus petite que celle de l'estimateur $\hat{R}_n = \frac{\sum_{j=1}^n f(X_j)}{n\mathbb{E}[g(X)]}$.

2 Schéma d'Euler pour des coefficients à croissance affine et localement Lipschitziens

Soit $T > 0$ un horizon de temps. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on considère un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien $W_t = \left(W_t^1, \cdots, W_t^d\right)$ à valeurs $\mathbb{R}^d$. On se donne un coefficient de diffusion $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, un coefficient de dérive $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, une condition initiale déterministe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on s'intéresse à l'équation différentielle stochastique

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s + \int_0^t b(X_s)ds,\ t \in [0,T]. \tag{1}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $(t_k = \frac{kT}{N})_{0\leq k\leq N}$ et $\tau_t = \lfloor \frac{Nt}{T} \rfloor \frac{T}{N}$ l'instant de cette grille uniforme qui précède $t \in [0,T]$.

1. (a) Écrire le schéma d'Euler en temps continu $(\bar{X}_t)_{t\in[0,T]}$ avec N pas pour cette EDS.

   (b) Quelle est sa vitesse de convergence forte lorsque les coefficients σ et b sont lipschitziens?

   (c) Comment améliorer cette vitesse de convergence forte lorsque σ et b sont plus régulières?

   On souhaite expliciter la dépendance de la vitesse de convergence du schéma d'Euler dans les constantes de Lipschitz respectives K_σ et K_b de σ et b. On rappelle à cet effet l'inégalité de Young : $\forall q, r > 0,\ \forall a, b \geq 0,\ a^q b^r \leq \frac{q}{q+r}a^{q+r} + \frac{r}{q+r}b^{q+r}$. On note $|x|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$.

   (d) *Dans cette question, on pourra supposer $n = d = 1$.*
   Pour $p \geq 1$ et $u \in [0,T]$, calculer $|X_u - \bar{X}_u|^{2p}$ à l'aide de la formule d'Itô.

   Avec l'inégalité de Burkholder Davis Gundy du lemme 3.1.5 du polycopié qui reste valable pour $p \geq \frac{1}{2}$, on en déduit l'existence d'une constante $C < \infty$ ne dépendant pas de (N, σ, b) telle que pour $t \in [0,T]$, si on pose $I_t = \int_0^t |X_s - \bar{X}_s|^{4p-2}|\sigma(X_s) - \sigma(\bar{X}_{\tau_s})|^2 ds$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{u\leq t}|X_u - \bar{X}_u|^{2p}\right] \leq{}& C\int_0^t \mathbb{E}[|X_s - \bar{X}_s|^{2p-1}|b(X_s) - b(\bar{X}_{\tau_s})|]ds \\ &+ C\int_0^t \mathbb{E}[|X_s - \bar{X}_s|^{2p-2}|\sigma(X_s) - \sigma(\bar{X}_{\tau_s})|^2]ds + C\mathbb{E}\left[\sqrt{I_t}\right],\end{aligned}$$

   estimation qui reste vraie pour des dimensions n et d générales.

(e) Montrer que

$$\sqrt{I_t} \leq \frac{\sup_{u\leq t}|X_u - \bar{X}_u|^{2p}}{2C} + \frac{C}{2}\int_0^t |X_s - \bar{X}_s|^{2p-2}|\sigma(X_s) - \sigma(\bar{X}_{\tau_s})|^2 ds.$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{u\leq t}|X_u - \bar{X}_u|^{2p}\right] \leq 2C\int_0^t \mathbb{E}[|X_s - \bar{X}_s|^{2p-1}|b(X_s) - b(\bar{X}_{\tau_s})|]ds$$
$$+ C(2+C)\int_0^t \mathbb{E}[|X_s - \bar{X}_s|^{2p-2}|\sigma(X_s) - \sigma(\bar{X}_{\tau_s})|^2]ds.$$

(f) Montrer que

$$|X_s - \bar{X}_s|^{2p-1}|b(X_s) - b(\bar{X}_{\tau_s})| \leq K_b\left(\frac{2p-1}{2p}|X_s - \bar{X}_s|^{2p} + \frac{1}{2p}|X_s - X_{\tau_s}|^{2p} + \sup_{u\leq s}|X_u - \bar{X}_u|^{2p}\right).$$

(g) En traitant de manière analogue $|X_s - \bar{X}_s|^{2p-2}|\sigma(X_s) - \sigma(\bar{X}_{\tau_s})|^2$, déduire l'existence d'une constante $C < \infty$ ne dépendant pas de (N, σ, b) telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{u\leq T}|X_u - \bar{X}_u|^{2p}\right] \leq C(K_b + K_\sigma^2)e^{C(K_b+K_\sigma^2)T}\int_0^T \mathbb{E}[|X_s - X_{\tau_s}|^{2p}]ds.$$

On suppose désormais que les coefficients σ et b sont à croissance au plus affine et localement lipschitziens

$$\exists K < \infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ |\sigma(x)| + |b(x)| \leq K(1 + |x|) \tag{2}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \exists K_{\sigma,m}, K_{b,m} < \infty, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } |x| \vee |y| \leq m,$$
$$|\sigma(y) - \sigma(x)| \leq K_{\sigma,m}|y - x| \text{ et } |b(y) - b(x)| \leq K_{b,m}|y - x|. \tag{3}$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\sigma_m(x) = \sigma(P_m x) \text{ et } b_m(x) = b(P_m x) \text{ où } P_m x = 1_{\{|x|>0\}}\frac{|x| \wedge m}{|x|}x \tag{4}$$

désigne la projection orthogonale de x sur la boule fermée de rayon m centrée à l'origine.

2. À quelle condition sur la suite $(K_{\sigma,m})_{m\in\mathbb{N}^*}$, le coefficient σ est-il globalement lipschitzien?

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Pour $x \in \mathbb{R}^n$, en remarquant que $\langle P_m(x), x - P_m(x)\rangle = m|x - P_m(x)|$, vérifier que pour $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $|z| \leq m$, $\langle P_m(x) - z, x - P_m(x)\rangle \geq 0$. En déduire que

   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ |x - y|^2 \geq |P_m(x) - P_m(y)|^2 + |x - P_m(x) + P_m(y) - y|^2$$

   et conclure que σ_m et b_m sont lipschitziennes de constantes respectives $K_{\sigma,m}$ et $K_{b,m}$ et vérifient $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |\sigma_m(x)| + |b_m(x)| \leq K(1 + |x|)$.

   (b) Que peut-on en déduire pour l'équation différentielle stochastique

   $$X_t^{(m)} = x_0 + \int_0^t \sigma_m(X_s^{(m)})dW_s + \int_0^t b_m(X_s^{(m)})ds,\ t \in [0, T]?$$

Les preuves du lemme 3.1.4 et de la proposition 3.1.6 du polycopié n'utilisent que la croissance affine des coefficients et pas leur caractère lipschitzien si bien que pour $p \geq 1$, $\sup_{m\in\mathbb{N}^*,t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[|X_t^{(m)}|^{2p}\right] < \infty$ et

$$\exists C < \infty,\ \forall 0 \leq s \leq t \leq T,\ \sup_{m\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left[|X_t^{(m)} - X_s^{(m)}|^{2p}\right] \leq C(t-s)^p.$$

(c) Vérifier l'existence d'une constante $C < \infty$ ne dépendant pas de m telle que pour $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,t]} |X_u^{(m)}|^{2p}\right] \leq 3^{2p-1}\left(|x_0|^{2p} + T^{2p-1}\int_0^t \mathbb{E}[|b_m(X_s^{(m)})|^{2p}]ds + CT^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}[|\sigma_m(X_s^{(m)})|^{2p}]ds\right).$$

En déduire que $\sup_{m\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,T]} |X_u^{(m)}|^{2p}\right] < +\infty$.

En notant $(\bar{X}_t^{(m)})_{t\in[0,T]}$ le schéma d'Euler en temps continu avec N pas associé, on peut montrer de la même façon que $\sup_{m,N\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}(|X_t^{(m)}| \vee |\bar{X}_t^{(m)}|)^{2p}\right] < +\infty$.

(d) Soit $\tau_{N,m} = \inf\{t \in [0,T] : |X_t^{(m)}| \vee |\bar{X}_t^{(m)}| \geq m\}$ (convention $\inf\emptyset = +\infty$). À l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que $\forall q \in]0,+\infty[$, $\lim_{m\to\infty} m^q \sup_{N\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\tau_{N,m} \leq T) = 0$.

(e) Vérifier que lorsque $\tau_{N,m} > t$, $(\bar{X}_s^{(m)})_{s\in[0,t]}$ et $(\bar{X}_s)_{s\in[0,t]}$ coincident.

On peut montrer qu'à N fixé dans $\mathbb{N}^*$, $(X_t = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} X_t^{(m)} 1_{\{\tau_{N,m-1}\leq t<\tau_{N,m}\}})_{t\in[0,T]}$ où $\tau_{N,0} = 0$ est solution de (1) et même que c'est l'unique solution de cette équation.

(f) Vérifier que pour $t \in [0,T]$ et $p \geq 1$,

$$|X_t - \bar{X}_t|^{2p} \leq \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \sup_{u\in[0,T]} |X_u^{(m)} - \bar{X}_u^{(m)}|^{2p} 1_{\{\tau_{N,m-1}\leq t<\tau_{N,m}\}}.$$

(g) En déduire que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t - \bar{X}_t|^{2p}\right] \leq \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}^{1/2}\left[\sup_{u\in[0,T]} |X_u^{(m)} - \bar{X}_u^{(m)}|^{4p}\right] \sqrt{\mathbb{P}(\tau_{N,m-1} \leq T)}.$$

(h) Conclure que lorsque pour tout $m \geq 2$, $K_{\sigma,m} \leq K\sqrt{\ln m}$ et $K_{b,m} \leq K\ln m$, alors

$$\exists C < \infty,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left[\sup_{u\leq T} |X_u - \bar{X}_u|^{2p}\right] \leq \frac{C}{N^p},$$

résultat démontré par Yuan et Mao dans *Stochastic Analysis and Applications* en 2008.