Méthodes de Monte-Carlo

Examen du mardi 30 janvier 2024 8h30-11h30

1 Fonction de la moyenne empirique

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variable aléatoires réelles indépendantes et indentiquement distribuées de carré intégrable. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique des n premières variables. On veut calculer $\varphi(\mathbb{E}[X_1])$ où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Quelle régularité minimale sur la fonction φ assure que $\varphi(\bar{X}_n)$ converge presque sûrement vers $\varphi(\mathbb{E}[X_1])$ lorsque $n \to \infty$?
2. Lorsque φ est dérivable en $\mathbb{E}[X_1]$, quel est le comportement asymptotique de $\sqrt{n}\left(\varphi(\bar{X}_n) - \varphi(\mathbb{E}[X_1])\right)$ lorsque $n \to \infty$?
3. Calculer $\mathbb{E}[(\bar{X}_n)^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2$.
4. On suppose que φ est convexe.
   (a) Pourquoi a-t-on $\varphi(\mathbb{E}[X_1]) \leq \mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_n)]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
   (b) Vérifier que pour $n \geq 2$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n X_j$ et en déduire que
   $$\mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_n)] \leq \mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_{n-1})].$$
5. Lorsque la fonction φ est C^2, montrer que
   $$\mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_n)] = \varphi(\mathbb{E}[X_1]) + \int_0^1 \mathbb{E}\left[\varphi''\left(\mathbb{E}[X_1] + \alpha(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1])\right)(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1])^2\right](1-\alpha)d\alpha$$
   et en déduire que $\mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_n)] - \varphi(\mathbb{E}[X_1]) \leq \frac{1}{2n}\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi''(x)\mathrm{Var}(X_1)$.

2 Version antithétique d'un estimateur stratifié

On veut calculer $\int_{[0,1]^d} f(u)du$ pour une fonction $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ continument différentiable. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour un multi-indice $\mathbf{j} = (j_1, \cdots, j_d) \in \{1, \cdots, k\}^d$, on note $x_{\mathbf{j}} = \left(\frac{2j_1-1}{2k}, \frac{2j_2-1}{2k}, \cdots, \frac{2j_d-1}{2k}\right)$ et on se donne des variables aléatoires $(U_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\{1,\cdots,k\}^d}$ i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[\frac{-1}{2k}, \frac{1}{2k}]^d$. On pose $n = k^d$ et on note

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{\mathbf{j}\in\{1,\cdots,k\}^d} f(x_{\mathbf{j}} + U_{\mathbf{j}}) \text{ et } Y_n = \frac{1}{n}\sum_{\mathbf{j}\in\{1,\cdots,k\}^d} \frac{f(x_{\mathbf{j}} + U_{\mathbf{j}}) + f(x_{\mathbf{j}} - U_{\mathbf{j}})}{2}.$$

1. Quelle sont les lois de $x_{\mathbf{j}} + U_{\mathbf{j}}$ et $x_{\mathbf{j}} - U_{\mathbf{j}}$ pour $\mathbf{j} \in \{1, \cdots, k\}^d$? En déduire que X_n et Y_n sont des estimateurs sans biais de $\int_{[0,1]^d} f(u)du$.
2. Vérifier que pour $\mathbf{j} \in \{1, \cdots, k\}^d$, $\mathrm{Var}(f(x_{\mathbf{j}} + U_{\mathbf{j}})) \leq \mathbb{E}\left[(f(x_{\mathbf{j}} + U_{\mathbf{j}}) - f(x_{\mathbf{j}}))^2\right]$ et que $|f(x_{\mathbf{j}} + U_{\mathbf{j}}) - f(x_{\mathbf{j}})| \leq \sup_{u\in[0,1]^d} |\nabla f(u)| \frac{\sqrt{d}}{2k}$. En déduire que $\mathrm{Var}(X_n) \leq \sup_{u\in[0,1]^d} |\nabla f(u)|^2 \frac{d}{4n^{1+\frac{2}{d}}}$.

3. On suppose maintenant que f est C^2. Vérifier que pour $y \in [\frac{-1}{2k}, \frac{1}{2k}]^d$,

$$\frac{f(x_{\mathbf{j}}+y)+f(x_{\mathbf{j}}-y)}{2} - f(x_{\mathbf{j}}) = \frac{1}{2}\int_0^1 y^* \left(\nabla^2 f(x_{\mathbf{j}}+\alpha y) + \nabla^2 f(x_{\mathbf{j}}-\alpha y)\right) y(1-\alpha)d\alpha$$

et en déduire que $\left|\frac{f(x_{\mathbf{j}}+U_{\mathbf{j}})+f(x_{\mathbf{j}}-U_{\mathbf{j}})}{2} - f(x_{\mathbf{j}})\right| \leq \frac{d}{8k^2} \sup_{\substack{u\in[0,1]^d \\ z\in\mathbb{R}^d:|z|=1}} |z^*\nabla^2 f(u)z|$ puis que $\mathrm{Var}(Y_n) \leq \frac{d^2}{64n^{1+\frac{4}{d}}} \sup_{\substack{u\in[0,1]^d \\ z\in\mathbb{R}^d:|z|=1}} \left(z^*\nabla^2 f(u)z\right)^2$.

3 Schéma d'Euler semi-discrétisé

Soit $T \in]0,+\infty[$ un horizon de temps. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on considère un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien $W_t = \left(W_t^1, \cdots, W_t^d\right)$ à valeurs $\mathbb{R}^d$. On se donne un coefficient de diffusion $\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ et un coefficient de dérive $b : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On suppose que

$$\text{(Lip) } \exists \mathrm{K} > 0,\ \forall \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}],\ \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n,\ |\sigma(t,x)| + |b(t,x)| \leq K(1+|x|) \\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| + |b(t,x)-b(t,y)| \leq K|x-y| \end{cases}.$$

Pour une condition initiale déterministe $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on s'intéresse à l'équation différentielle stochastique

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s + \int_0^t b(s,X_s)ds,\ t\in[0,T]. \tag{1}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $(t_k = \frac{kT}{N})_{0\leq k\leq N}$ et $\tau_t = \lfloor \frac{Nt}{T} \rfloor \frac{T}{N}$ l'instant de cette grille uniforme qui précède $t \in [0,T]$.

1. Écrire le schéma d'Euler en temps continu $(\bar{X}_t)_{t\in[0,T]}$ avec N pas pour cette EDS.

2. Quelle est sa vitesse de convergence forte lorsque les coefficients σ et b vérifient également

$$\exists \alpha, K > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall (s,t) \in [0,T],\ |\sigma(t,x)-\sigma(s,x)| + |b(t,x)-b(s,x)| \leq K(1+|x|)(t-s)^\alpha.$$

On suppose maintenant que $\boxed{d = n}$ et que l'on sait calculer les intégrales des coefficients b et $\sigma\sigma^*$ par rapport à leur variable temporelle.

3. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 \leq s < t \leq T$, il existe une matrice $\theta(s,t,x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $\theta\theta^*(s,t,x) = \frac{1}{t-s}\int_s^t \sigma\sigma^*(r,x)dr$.

On considère le schéma défini par : $\tilde{X}_0 = x_0$ et

$$\tilde{X}_{t_{k+1}} = \tilde{X}_{t_k} + \theta(t_k, t_{k+1}, \tilde{X}_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(s, \tilde{X}_{t_k})ds,\ k \in \{0,\cdots,N-1\}.$$

4. Pour $k \in \{0,\cdots,N-1\}$, donner la loi conditionnelle de $\tilde{X}_{t_{k+1}}$ sachant $(\tilde{X}_{t_0}, \tilde{X}_{t_1}, \cdots, \tilde{X}_{t_k})$.

5. En déduire l'égalité des lois des vecteurs $(\tilde{X}_{t_0}, \tilde{X}_{t_1}, \cdots, \tilde{X}_{t_N})$ et $(\hat{X}_{t_0}, \hat{X}_{t_1}, \cdots, \hat{X}_{t_N})$ où

$$\hat{X}_t = x_0 + \int_0^t \sigma(s, \hat{X}_{\tau_s})dW_s + \int_0^t b(s, \hat{X}_{\tau_s})ds,\ t\in[0,T].$$

6. Soit $p \geq 1$. Montrer que

$$2^{1-2p}\mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,t]}|\hat{X}_u - X_u|^{2p}\right] \leq CT^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}\left[|\sigma(s,\hat{X}_{\tau_s}) - \sigma(s,X_s)|^{2p}\right] ds + T^{2p-1}\int_0^t \mathbb{E}\left[|b(s,\hat{X}_{\tau_s}) - b(s,X_s)|^{2p}\right] ds$$

en précisant l'origine de la constante $C < +\infty$.

7. Justifier que

$$|\sigma(s,\hat{X}_{\tau_s}) - \sigma(s,X_s)|^{2p} + |b(s,\hat{X}_{\tau_s}) - b(s,X_s)|^{2p} \leq 2^{2p}K^{2p}\left(\sup_{u\in[0,s]}|\hat{X}_u - X_u|^{2p} + |X_{\tau_s} - X_s|^{2p}\right).$$

8. Conclure que

$$\exists C_{2p} < \infty,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,T]}|\hat{X}_u - X_u|^{2p}\right] \leq \frac{C_{2p}}{N^p}$$

et en déduire le comportement pour $N \to \infty$ de $N^\gamma \sup_{u\in[0,T]}|\hat{X}_u - X_u|$ lorsque $\gamma < \frac{1}{2}$.

9. Lorsque $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne, montrer l'existence d'une constante $C_f < +\infty$ telle que $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ |\mathbb{E}[f(\tilde{X}_T)] - \mathbb{E}[f(X_T)]| \leq \frac{C_f}{\sqrt{N}}$.