Accélération de convergence pour le calcul d'options dans un modèle à volatilité stochastique

Ouvrez un navigateur internet à l'adresse

http ://cermics.enpc.fr/∼jourdain/MCfinance/Finance.html

L'objectif de ce TP en scilab est d'illustrer numériquement les techniques d'accélération de convergence vues en cours. On se place dans le modèle à volatilité stochastique suivant :

$$\begin{cases} dY_t = -\alpha Y_t dt + \beta dW_t^1 \\ dS_t = (\sigma_0 + Y_t) S_t (\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^2) + r S_t dt \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha, \beta > 0$, $Y_0 = 0$, $\rho \in [-1, 1]$ et (W^1, W^2) est un mouvement brownien de dimension 2. Pour une option européenne d'échéance T et de payoff $f(S_t, t \leq T)$ on souhaite calculer $\mathbb{E}(e^{-rT} f(S_t, t \leq T))$. Bien entendu, il est nécessaire pour cela de discrétiser l'équation différentielle stochastique (1) : on note $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre de pas de temps, $\Delta t = T/N$ le pas de discrétisation et pour $k \in \{0, \dots, N\}$, $t_k = k\Delta t$ le k-ème instant de discrétisation. Nous allons successivement étudier

- dans le cas d'un Call vanille ($f(s_t, t \leq T) = (s_T - K)^+$) les techniques de réduction de variance qui à N fixé permettent de réduire le nombre de trajectoires indépendantes nécessaires pour obtenir une erreur statistique donnée.
- dans le cas d'un Call barrière Up and Out ($f(s_t, t \leq T) = 1_{\{\max_{[0,T]} s_t < b\}} (s_T - K)^+$) les techniques de pont brownien qui permettent d'accélerer la décroissance du biais avec N.

1 Réduction de variance

On note $X_t = e^{-rt} S_t$ le sous-jacent actualisé.

1. Calculer dX_t puis écrire le payoff actualisé du Call vanille à l'aide de X_T.
2. Quelle est la loi du couple $(Y_{t_{k+1}} - e^{-\alpha\Delta t} Y_{t_k}, W^1_{t_{k+1}} - W^1_{t_k})$? Et celle du vecteur $(Y_{t_{k+1}} - e^{-\alpha\Delta t} Y_{t_k}, \rho(W^1_{t_{k+1}} - W^1_{t_k}) + \sqrt{1-\rho^2}(W^2_{t_{k+1}} - W^2_{t_k}))$?
3. Quel est l'intérêt du schéma de discrétisation suivant

$$\begin{cases} \bar{Y}^N_{t_{k+1}} = e^{-\alpha\Delta t} \bar{Y}^N_{t_k} + \beta g^1_{k+1} \sqrt{\frac{1-e^{-2\alpha\Delta t}}{2\alpha}} \\ \bar{X}^N_{t_{k+1}} = \bar{X}^N_{t_k} \left(1 + (\sigma_0 + \bar{Y}^N_{t_k}) g_{k+1} \sqrt{\Delta t}\right) \\ g_{k+1} = \rho g^1_{k+1} \sqrt{\frac{2(1-e^{-\alpha\Delta t})^2}{\alpha\Delta t(1-e^{-2\alpha\Delta t})}} + g^2_{k+1} \sqrt{1 - \frac{2\rho^2(1-e^{-\alpha\Delta t})^2}{\alpha\Delta t(1-e^{-2\alpha\Delta t})}} \end{cases} \tag{2}$$

où $(g^1_k, g^2_k)_{k\geq 1}$ est une suite de couples i.i.d. avec g^1_1 et g^2_1 gaussiennes centrées réduites indépendantes ? C'est ce schéma que nous allons utiliser dans la suite.

1.1 Conditionnement

On se place dans le cas $\rho = 0$ où le mouvement brownien qui dirige le processus Y et le mouvement brownien qui dirige le processus X sont indépendants.

1. Comment le schéma se simplifie-t-il ? Implémentez-le sous forme vectorielle dans le programme *VScondit_Q.sce* en prenant garde à mettre à jour X avant de mettre à jour Y.
2. Que vaut $Z = \mathbb{E}((X_T - Ke^{-rT})^+|Y_t, t \leq T)$? Comment comparer Var (Z) et Var $((X_T - Ke^{-rT})^+)$?
3. Stockez dans la variable *somcarsig* la somme des carrés des volatilités utilisées sur chaque pas de temps. Que représente $\sqrt{somcarsig/N}$?
4. Exécuter le programme (*exec VScondit_Q.sce*) ? Quelle réduction de variance obtient-on par conditionnement ? Comment évolue le facteur de réduction avec le niveau moyen de la volatilité σ_0 ? Et avec le niveau β du bruit de la volatilité ? Est-ce intuitif ?

1.2 Variable de contrôle construite avec le modèle de Black-Scholes

On ne suppose plus $\rho = 0$ et on va utiliser $(S_0 e^{\sigma_0(\rho W_T^1 + \sqrt{1-\rho^2} W_T^2) - \frac{\sigma_0^2 T}{2}} - Ke^{-rT})^+$ comme variable de contrôle pour le calcul du prix du Call.

1. Implémentez le schéma général dans le programme *VSvarcontBS_Q.sce*. Implémentez également l'évolution du processus de Black-Scholes actualisé pour la volatilité σ_0 avec les mêmes accroissements browniens que ceux qui dirigent X.
2. Stockez dans le vecteur *paycont* les payoffs correspondant au sous-jacent actualisé moins ceux correspondant au processus de Black-Scholes actualisé. Exécutez le programme *VSvarcontBS_Q.sce*.

1.3 Régression sur le sous-jacent actualisé

1. Que vaut $\mathbb{E}(\bar{X}_T^N)$? Pour quelle valeur γ^* de γ la variance de $(\bar{X}_T^N - Ke^{-rT})^+ - \gamma \bar{X}_T^N$ est-elle minimale ? Estimez γ^* dans la variable *coef* du programme *VSvarcontS_Q.sce* puis exécutez ce programme.
2. L'évolution du facteur de réduction de variance avec le strike K est-elle conforme à l'intuition ?

2 Réduction du biais pour les options barrières

On s'intéresse au Call Up and Out de payoff $1_{\{\max_{[0,T]} S_t < b\}}(S_T - K)^+$.

1. Déduire de (2) un schéma $(\bar{S}_{t_k}^N, \bar{Y}_{t_k}^N)_{0 \leq k \leq N}$ permettant de simuler le sous-jacent S.
2. Que vaut $\mathbb{P}\left(\max_{[t_k, t_{k+1}]} \bar{S}_t^N \geq b \middle| \bar{Y}_{t_k}^N, \bar{S}_{t_k}^N, \bar{S}_{t_{k+1}}^N\right)$?
3. Implémentez le schéma et mettez à jour la probabilité conditionnelle pour que le schéma en temps continu n'ait pas franchi la barrière dans le programme *VSbarriere_Q.sce*. Exécuter ce programme avec $\beta = 0$ pour comparer avec la formule explicite qui donne le prix de l'option barrière dans le modèle de Black-Scholes avec volatilité σ_0. Reprendre avec $\beta = 0.1$.