Discrétisation d'équations différentielles stochastiques

Ouvrez un navigateur internet à l'adresse

http ://cermics.enpc.fr/∼jourdain/MCfinance/Finance.html

L'objectif de ce TP en scilab est d'illustrer numériquement dans le cadre du modèle de Black-Scholes les résultats du cours sur les schémas d'Euler et de Milshtein. On note T l'horizon de la simulation, $\Delta t = T/N$ (où $N \in \mathbb{N}^*$) le pas de discrétisation et pour $k \in \{0, \ldots, N\}$, $t_k = k\Delta t$ le k-ème instant de discrétisation.

1 Convergence forte

L'intérêt de se placer dans le modèle de Black-Scholes

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + rS_t dt$$

est la possibilité de simuler exactement le sous-jacent en utilisant les mêmes accroissements browniens que ceux qui servent à générer les processus discrétisés.

1. Exprimer en fonction de la valeur en t_k du sous-jacent S_{t_k} (resp. du schéma d'Euler $S^e_{t_k}$, resp. du schéma de Milshtein $S^m_{t_k}$) et de l'accroissement $\Delta W_{k+1} = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ la valeur en t_{k+1} du sous-jacent $S_{t_{k+1}}$ (resp. du schéma d'Euler $S^e_{t_{k+1}}$, resp. du schéma de Milshtein $S^m_{t_{k+1}}$).
2. Implémenter ces formules dans les zones à compléter du programme *vitfort_Q.sce.*
3. Quel est le comportement théorique de $\mathbb{E}((S_T - S^e_T)^2)$ en fonction de N ? Et celui de $\mathbb{E}((S_T - S^m_T)^2)$?
4. Exécuter le programme (*exec vitfort_Q.sce*) pour constater la dépendance en N de $\mathbb{E}((S_T - S^e_T)^2)$ et $\mathbb{E}((S_T - S^m_T)^2)$.

2 Convergence faible

2.1 Vitesse faible

On souhaite maintenant étudier la vitesse faible des schémas d'Euler et de Milshtein pour le calcul d'un Put européen d'échéance T dans le modèle de Black-Scholes, c'est-à-dire la dépendance en N des quantités $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S^e_T)^+) - \mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+)$ et $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S^m_T)^+) - \mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+)$. Pour cela, on va évaluer ces quantités d'une part en calculant $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S_T)^+)$ par la formule de Black-Scholes et d'autre part en approchant cette espérance par un calcul Monte-Carlo utilisant les mêmes accroissements browniens que ceux qui servent à calculer $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S^e_T)^+)$ et $\mathbb{E}(e^{-rT}(K - S^m_T)^+)$. La deuxième approche entre dans le cadre des techniques de variables de contrôle pour réduire la variance.

1. Compléter le programme *vitfaible_Q.sce.*

2. Quel est le comportement théorique de $\mathbb{E}(e^{-rT}(K-S_T^e)^+) - \mathbb{E}(e^{-rT}(K-S_T)^+)$ en fonction de N ?
3. Exécuter le programme (*exec vitfaible_Q.sce*) pour constater la vitesse faible effective des schémas d'Euler et de Milshtein. La technique de variable de contrôle est-elle efficace ?

2.2 Extrapolation de Romberg

On souhaite maintenant étudier l'accélération de la convergence faible par la méthode d'extrapolation de Romberg. On note respectivement $S^{e,N}$ et $S^{e,2N}$ (resp. $S^{m,N}$ et $S^{m,2N}$) les schémas d'Euler (resp. Milshtein) pour N resp. $2N$ pas de temps. On va évaluer

$$\mathbb{E}\left(e^{-rT}\left[2(K-S_T^{e,2N})^+ - (K-S_T^{e,N})^+ - (K-S_T)^+\right]\right)$$

et la quantité analogue pour le schéma de Milshtein en utilisant les même accroissements browniens pour chacun des termes dans l'espérance afin de réduire la variance.

1. Pour $k \in \{0,\dots,N-1\}$ exprimer $S_{\frac{(k+1)T}{N}}$ (resp. $S^{e,N}_{\frac{(k+1)T}{N}}$, $S^{e,2N}_{\frac{(k+1)T}{N}}$, $S^{m,N}_{\frac{(k+1)T}{N}}$, $S^{m,2N}_{\frac{(k+1)T}{N}}$) en fonction de $S_{\frac{kT}{N}}$ (resp. $S^{e,N}_{\frac{kT}{N}}$, $S^{e,2N}_{\frac{kT}{N}}$, $S^{m,N}_{\frac{kT}{N}}$, $S^{m,2N}_{\frac{kT}{N}}$) et des accroissements $W_{\frac{(2k+1)T}{2N}} - W_{\frac{kT}{N}}$ et $W_{\frac{(k+1)T}{N}} - W_{\frac{(2k+1)T}{2N}}$.
2. Implémenter ces formules dans le programme *romberg_Q.sce* puis l'exécuter (*exec romberg_Q.sce*). Que constatez-vous ?
3. Exécuter le programme *vectromberg.sce* optimisé pour effectuer rapidement un grand nombre de simulations indépendantes.

3 Modèle à volatilité stochastique

On s'intéresse au modèle à volatilité stochastique

$$\begin{cases} dY_t = -\alpha Y_t dt + \beta dW_t^1 \\ dS_t = f(Y_t)S_t d(\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^2) + rS_t dt \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha, \beta > 0$, $Y_0 = 0$, $\rho \in [-1,1]$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction régulière et (W^1, W^2) est un mouvement brownien de dimension 2.

1. Montrer que l'on ne peut implémenter le schéma de Milshtein que si $\rho^2 = 1$ ou bien f est constante.
2. Dans le cas où $f(y) = \sigma_0 + y$, approcher numériquement $\mathbb{E}(e^{-rT}(K-S_T)^+)$.
3. Quelle est la loi du couple $(Y_{t_{k+1}} - e^{-\alpha\Delta t}Y_{t_k}, W^1_{t_{k+1}} - W^1_{t_k})$? En déduire comment améliorer la discrétisation du modèle.