Méthodes de Monte Carlo pour les processus financiers

Benjamin JOURDAIN

November 21, 2014

Chapter 1

Discrétisation des EDS

1.1 Équations différentielles stochastiques

1.1.1 Existence et unicité, applications en finance

Soit $T > 0$ un horizon de temps (la maturité d'une option par exemple). Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on considère un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien $W_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^d \end{pmatrix}$ à valeurs $\mathbb{R}^d$ et Y une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable à valeurs $\mathbb{R}^n$. On se donne également des coefficients $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et on s'intéresse à l'Equation Différentielle Stochastique

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt \\ X_0 = Y \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.1.1. *On appelle solution de l'EDS* (1.31) *un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *continu* $\mathcal{F}_t$*-adapté à valeurs* $\mathbb{R}^n$ *tel que*

- *p.s.,* $\int_0^T |b(s, X_s)| + |\sigma(s, X_s)|^2 ds < +\infty$,
- *p.s.,* $\forall t \in [0,T]$, $X_t = Y + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$.

Le principal résultat d'existence et d'unicité pour les EDS est l'analogue du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ordinaires et s'obtient sous des hypothèses similaires sur les coefficients de l'équation.

Théorème 1.1.2 (d'Itô)**.** *On suppose que*

$$\text{(Lip) } \exists \mathrm{K} > 0,\ \forall \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}],\ \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n,\ |\sigma(t,x)| + |b(t,x)| \leq K(1 + |x|) \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x - y| \end{cases}.$$

Alors l'EDS (1.31) *admet une unique solution* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *(si* X'_t *est une autre solution, alors p.s.,* $\forall t \in [0,T]$, $X_t = X'_t$*). En outre, si* $\mathbb{E}(|Y|^2) < +\infty$*, alors*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T} |X_t|^2\right) \leq C(1 + \mathbb{E}\left(|Y|^2\right)) \text{ où } C \text{ ne dépend pas de } Y. \tag{1.2}$$

Démonstration : La démonstration repose sur une technique de point fixe. L'espace

$$\mathcal{E} = \left\{ (X_t)_{t\in[0,T]} \text{ processus } \mathcal{F}_t\text{-adapté continu à valeurs } \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}|X_t|^2\right) < +\infty \right\}$$

muni de la norme $\sqrt{\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}|X_t|^2\right)}$ est un espace de Banach.

• Dans le cas où $\mathbb{E}(|Y|^2) < +\infty$ commençons par montrer que toute solution X de (1.31) vérifie (1.2) et appartient donc à $\mathcal{E}$. Pour $\nu_m = \inf\{t \geq 0 : \ |X_t| \geq m\}$ (convention $\inf\emptyset = T$), on a

$$\sup_{s\leq t}|X_{s\wedge\nu_m}|^2 \leq 3\left(|Y|^2 + \sup_{s\leq t}\left|\int_0^s 1_{\{r\leq\nu_m\}}\sigma(r,X_r)dW_r\right|^2 + \left(\int_0^t |b(r\wedge\nu_m, X_{r\wedge\nu_m})|dr\right)^2\right).$$

En utilisant l'inégalité de Doob pour l'intégrale stochastique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'intégrale classique, puis l'hypothèse (Lip), on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}|X_{s\wedge\nu_m}|^2\right) &\leq C\left(\mathbb{E}(|Y|^2) + \int_0^t \mathbb{E}\left(|\sigma(r\wedge\nu_m, X_{r\wedge\nu_m})|^2 + t|b(r\wedge\nu_m, X_{r\wedge\nu_m})|^2\right)dr\right)\\
&\leq C\left(\mathbb{E}(|Y|^2) + \int_0^t 1 + \mathbb{E}\left(\sup_{s\leq r}|X_{s\wedge\nu_m}|^2\right)dr\right)
\end{aligned}$$

où la constante C peut changer d'une ligne à l'autre mais ne dépend ni de t ni de m. Par le Lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq T}|X_{s\wedge\nu_m}|^2\right) \leq C(\mathbb{E}(|Y|^2) + T)e^{CT}.$$

Comme par continuité des trajectoires de X, p.s. $\nu_m = T$ pour m assez grand, on a p.s. $\sup_{s\leq T}|X_{s\wedge\nu_m}| = \sup_{s\leq T\wedge\nu_m}|X_s| \to \sup_{s\leq T}|X_s|$ lorsque $m \to +\infty$. On déduit alors (1.2) du lemme de Fatou.

On introduit ensuite Φ qui à un processus $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ de $\mathcal{E}$ associe le processus $(\Phi(X)_t)_{t\in[0,T]}$ défini par

$$\Phi(X)_t = Y + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s + \int_0^t b(s,X_s)ds,$$

dont on vérifie facilement qu'il appartient à $\mathcal{E}$ en reprenant le calcul ci-dessus mais sans la technique de localisation. Comme nous avons vérifié que toute solution de (1.31) est dans $\mathcal{E}$, un processus X est solution de (1.31) si et seulement si c'est un point fixe de Φ. Pour $X, X' \in \mathcal{E}$ et $t \leq T$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'inégalité de Doob et enfin l'hypothèse (Lip), il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}|\Phi(X)_s - \Phi(X')_s|^2\right) &\leq 2\mathbb{E}\Bigg(\sup_{s\leq t}\left|\int_0^s(\sigma(r,X_r) - \sigma(r,X'_r))dW_r\right|^2\\
&\qquad + t\int_0^t |b(r,X_r) - b(r,X'_r)|^2dr\Bigg)\\
&\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left(|\sigma(r,X_r) - \sigma(r,X'_r)|^2 + |b(r,X_r) - b(r,X'_r)|^2\right)dr\\
&\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{s\leq r}|X_s - X'_s|^2\right)dr
\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend pas de t ni de X et X'. En itérant cette inégalité, on obtient que pour $k \in \mathbb{N}^*$, si Φ^k désigne la composée k-ième de Φ,

$$\begin{aligned}\|\Phi^k(X) - \Phi^k(X')\|^2 &\leq C^k \int_0^T \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_{k-1}} \mathbb{E}\left(\sup_{s \leq r_k} |X_s - X'_s|^2\right) dr_k \dots dr_1 \\ &\leq C^k \|X - X'\|^2 \int_0^T \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_{k-1}} dr_k \dots dr_1 = \frac{C^k T^k}{k!} \|X - X'\|^2.\end{aligned}$$

Donc pour $\bar{k}$ assez grand, $\Phi^{\bar{k}}$ est une contraction sur $\mathcal{E}$. Soit X son unique point fixe. Tout point fixe de Φ est point fixe de $\Phi^{\bar{k}}$ et donc égal à X. Par ailleurs,

$$\Phi^{\bar{k}}(\Phi(X)) = \Phi^{\bar{k}+1}(X) = \Phi(\Phi^{\bar{k}}(X)) = \Phi(X)$$

assure que $\Phi(X)$ est point fixe de $\Phi^{\bar{k}}$ et donc égal à X. On conclut donc que (1.31) admet X comme unique solution.

• Dans le cas où $\mathbb{E}(|Y|^2) = +\infty$, pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $(X_t^m)_{t \in [0,T]}$ la solution de l'EDS issue de la condition initiale $Y 1_{\{|Y| < m\}}$. On vérifie ensuite que

$$X_t = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} 1_{\{m-1 \leq |Y| < m\}} X_t^m$$

est solution de (1.31) et que toute autre solution lui est égale. □

Exemple. La plupart des modèles d'actifs financiers reposent sur des EDS.

- **le processus d'Ornstein-Uhlenbeck :** pour $n = d = 1$ et $c \in \mathbb{R}$, l'unique solution de
$$dX_t = dW_t + cX_t dt,\ X_0 = Y$$
est $X_t = Ye^{ct} + \int_0^t e^{c(t-s)} dW_s$.
- **le modèle de Black-Scholes :** pour $n = d = 1$ et $\sigma, r \in \mathbb{R}$, l'unique solution de
$$dX_t = \sigma X_t dW_t + rX_t dt,\ X_0 = Y$$
est $X_t = Ye^{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$.
- **le modèle à volatilité locale (ou modèle de Dupire) :** pour $n = d = 1$, $r \in \mathbb{R}$, et $\eta : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant
$$\exists K > 0,\ \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R},\ |\eta(t,x)| + |x||\partial_x \eta(t,x)| \leq K,$$
l'équation différentielle stochastique
$$dX_t = \eta(t, X_t) X_t dW_t + rX_t dt,\ X_0 = Y$$
admet une unique solution. On vérifie que $X_t = Ye^{\int_0^t \eta(s,X_s)dW_s + (rt - \frac{1}{2}\int_0^t \eta^2(s,X_s)ds)}$.
- **le modèle à volatilité stochastique :** pour $n = d = 2$, on peut considérer un modèle de la forme
$$\begin{cases} dX_t = f(Y_t) X_t (\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^2) + rX_t dt \\ dY_t = \eta dW_t^1 + (a - bY_t) dt \end{cases},\ (X_0, Y_0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

où $\eta, a, b, r \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [-1,1]$ est le coefficient de corrélation entre le brownien W_t^1 qui dirige le processus de volatilité et celui $\rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}W_t^2$ qui dirige l'évolution de l'actif. On suppose la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée. Mais la fonction

$$\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \rho f(y)x & \sqrt{1-\rho^2}f(y)x \\ \eta & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas en général globalement lipschitzienne à cause du terme quadratique $f(y)x$. En posant formellement $Z_t = \ln(X_t)$, on obtient

$$dZ_t = f(Y_t)(\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^2) + (r - \frac{1}{2}f^2(Y_t))dt.$$

Comme f^2 est lipschitzienne, l'EDS pour (Z, Y) admet une unique solution. On obtient une solution de l'EDS de départ en prenant l'exponentielle de la première coordonnée. Le caractère localement Lipschitzien des coefficients suffit à en assurer l'unicité.

Le prix d'un Call d'échéance T et de Strike K portant sur le sous-jacent X est donné par $C = \mathbb{E}\left(e^{-rT}(X_T - K)^+\right)$. Dans le cas du modèle de Black-Scholes, on dispose à la fois d'une formule fermée pour ce prix et de la possibilité de simuler exactement $X_T = ye^{\sigma W_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}$ ($y > 0$ est le cours initial du sous-jacent) pour calculer C par la méthode de Monte Carlo. Mais dès que l'on complique un peu le modèle en supposant que la volatilité est soit une fonction locale du temps et du sous-jacent, soit stochastique, ces deux propriétés très agréables disparaissent en général. Pour pouvoir calculer le prix, on peut néanmoins discrétiser l'équation différentielle stochastique qui donne le modèle de façon à générer $\bar{X}_T$ qui approche X_T. La méthode de Monte Carlo consiste alors à approcher C par $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^M e^{-rT}(\bar{X}_T^i - K)^+$ où les variables $\bar{X}_T^i$, générées par le même schéma mais pour des accroissements browniens independants sont i.i.d.. L'erreur se décompose alors classiquement en un terme de biais plus un terme d'erreur statistique :

$$\begin{aligned} C - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M e^{-rT}(\bar{X}_T^i - K)^+ =& \mathbb{E}\left(e^{-rT}(X_T - K)^+\right) - \mathbb{E}\left(e^{-rT}(\bar{X}_T - K)^+\right) \\ &+ \mathbb{E}\left(e^{-rT}(\bar{X}_T - K)^+\right) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M e^{-rT}(\bar{X}_T^i - K)^+. \end{aligned}$$

Le comportement du terme d'erreur statistique est bien connu et découle du théorème de la limite centrale : pour peu que $\mathbb{E}\left([(\bar{X}_T - K)^+]^2\right) < +\infty$, ce terme se comporte comme $e^{-rT}\sqrt{\frac{\text{Var}\,((\bar{X}_T - K)^+)}{M}}\,G$ où $G \sim \mathcal{N}_1(0,1)$ lorsque M est grand. Dans le prochain chapitre, nous présenterons différentes techniques de réduction de variance permettant de diminuer ce terme.

Dans le présent chapitre, nous allons nous attacher à analyser le terme de biais qui dépend bien sûr du schéma de discrétisation retenu pour approcher X_T.

Remarque 1.1.3. • En dimension $n = d = 1$, l'unicité énoncée dans le théorème 1.1.2 reste vraie sans supposer que le coefficient de diffusion σ est lipschitzien dans la variable d'espace x mais sous l'hypothèse plus faible d'existence d'une fonction $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\int_{0+} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty$ et que

$$\forall t \in [0,T],\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq \rho(|x-y|).$$

C'est ce qui assure l'unicité pour l'EDS de Cox-Ingersoll-Ross

$$dX_t = \eta\sqrt{X_t}dW_t + (a - bX_t)dt,\ X_0 = Y \geq 0$$

où $\eta, a \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On peut également montrer l'existence pour cette EDS et on en déduit facilement l'existence et l'unicité pour le modèle à volatilité stochastique d'Heston où le carré de la volatilité est un processus de Cox-Ingersoll-Ross :

$$\begin{cases} dS_t = \sqrt{V_t}S_t dW_t^1 + rS_t dt \\ dV_t = \eta\sqrt{V_t}(\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^2) + (a - bV_t)dt \end{cases}.$$

- Lorsque l'on ne fixe pas le mouvement Brownien mais que l'on cherche un couple $(X_t, W_t)_{t\in[0,T]}$ tel que $(W_t)_t$ est un mouvement brownien et que $(X_t)_t$ vérifie (1.31) on définit une notion de solution plus faible que celle étudiée plus haut.
  Soit par exemple $(B_t)_t$ est un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ independant de Y à valeurs $\mathbb{R}^d$ et $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction bornée et mesurable (mais pas plus régulière). Par le théorème de Girsanov, sous la probabilité $\mathbb{Q}$ de densité $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(\int_0^T b(s, Y + B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T b^2(s, Y + B_s)ds\right)$ le processus $(W_t = B_t - \int_0^t b(s, Y + B_s)ds)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement Brownien. Si on pose $X_t = Y + B_t$, on a alors
  $$X_t = Y + W_t + \int_0^t b(s, Y + B_s)ds = Y + W_t + \int_0^t b(s, X_s)ds.$$
  Ainsi le couple (X_t, W_t) est solution faible de (1.31) avec le coefficient de diffusion σ constant égal à la matrice identité $d \times d$.

1.1.2 Propriétés des solutions

Sous l'hypothèse (Lip), il est possible de contrôler les moments de la solution de l'équation

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt,\ X_0 = y \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

lorsque la condition initiale y est déterministe.

Lemme 1.1.4. *Soit $p \geq 1$. Il existe une constante C dépendant de p, de T, des coefficients σ et b mais pas de la condition initiale y telle que*

$$\sup_{t\leq T}\mathbb{E}(|X_t|^{2p}) \leq C(1 + |y|^{2p}). \tag{1.4}$$

Démonstration : On se place pour simplifier dans le cas $n = d = 1$. La fonction $f(x) = |x|^{2p}$ est telle que $f'(x) = 2p|x|^{2p-2}x$ et $f''(x) = 2p(2p-1)|x|^{2p-2}$. La formule d'Itô assure que

$$\begin{aligned}|X_t|^{2p} =& |y|^{2p} + \int_0^t 2p|X_s|^{2p-2}X_s b(s, X_s) + p(2p-1)|X_s|^{2p-2}\sigma^2(s, X_s)ds \\ &+ \int_0^t 2p|X_s|^{2p-2}X_s\sigma(s, X_s)dW_s.\end{aligned}$$

Pour pouvoir assurer que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle, on utilise une procédure de localisation. Pour $\nu_m = \inf\{t \geq 0 : \ |X_t| \geq m\}$ (convention $\inf \emptyset = T$), $\mathbb{E}\left(\int_0^{\nu_m \wedge t} 2p|X_s|^{2p-2}X_s\sigma(s,X_s)dW_s\right) = 0$, ce qui assure, en utilisant (Lip) pour la seconde inégalité, puis $|x|^{2p-2} + |x|^{2p-1} + |x|^{2p} \leq 3(1+|x|^{2p})$ pour la troisième

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X_{\nu_m\wedge t}|^{2p}\right) &= |y|^{2p} + \mathbb{E}\left(\int_0^{\nu_m\wedge t} 2p|X_s|^{2p-2}X_s b(s,X_s) + p(2p-1)|X_s|^{2p-2}\sigma^2(s,X_s)ds\right)\\
&\leq |y|^{2p} + C\int_0^t \mathbb{E}\left(|X_{\nu_m\wedge s}|^{2p-1}(1+|X_{\nu_m\wedge s}|) + |X_{\nu_m\wedge s}|^{2p-2}(1+|X_{\nu_m\wedge s}|)^2\right)ds\\
&\leq |y|^{2p} + C\int_0^t 1 + \mathbb{E}\left(|X_{\nu_m\wedge s}|^{2p}\right)ds\\
&\leq |y|^{2p} + Ct + C\int_0^t \mathbb{E}\left(|X_{\nu_m\wedge s}|^{2p}\right)ds,
\end{aligned}$$

où la constante C peut changer d'une ligne à l'autre mais ne dépend ni de m ni de y. Le lemme de Gronwall implique alors que

$$\forall t \leq T,\ \mathbb{E}\left(|X_{\nu_m\wedge t}|^{2p}\right) \leq (|y|^{2p} + CT)e^{Ct} \leq (|y|^{2p}+CT)e^{CT}.$$

Comme lorsque $m \to +\infty$, $\nu_m \to T$ p.s., $X_{\nu_m\wedge t} \to X_t$ p.s. et le Lemme de Fatou implique que $\mathbb{E}\left(|X_t|^{2p}\right) \leq \liminf_{m\to+\infty} \mathbb{E}\left(|X_{\nu_m\wedge t}|^{2p}\right)$. On en déduit que

$$\forall t \leq T,\ \mathbb{E}\left(|X_t|^{2p}\right) \leq (|y|^{2p}+CT)e^{CT}.$$

□

Nous allons également contrôler les moments des accroissements de la solution de (1.3), en utilisant l'inégalité de Burkholder Davis Gundy qui généralise l'inégalité de Doob ($p = 1$).

Lemme 1.1.5. *Soit $p \geq 1$. Il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour tout processus $(H_s)_{s\geq 0}$ à valeurs $\mathbb{R}^{n\times d}$ $\mathcal{F}_s$-adapté et tout $t \geq 0$ tel que $\mathbb{P}\left(\int_0^t |H_s|^2 ds < +\infty\right) = 1$,*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}\left|\int_0^s H_r dW_r\right|^{2p}\right) \leq C_p \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t |H_r|^2 dr\right)^p\right). \tag{1.5}$$

Avec le lemme 1.1.4, nous allons en déduire la majoration suivante :

Proposition 1.1.6. *Soit $p \geq 1$. Il existe une constante C dépendant de p, des coefficients σ et b et de T mais pas de la condition initiale y telle que*

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq T,\ \mathbb{E}(|X_t - X_s|^{2p}) \leq C(1+|y|^{2p})(t-s)^p. \tag{1.6}$$

Dans la preuve nous aurons besoin du résultat suivant : pour $q \geq 1$,

$$\left|\sum_{k=1}^K a_k\right|^q \leq K^{q-1}\sum_{k=1}^K |a_k|^q \text{ et } \left|\int_A f(x)dx\right|^q \leq |A|^{q-1}\int_A |f(x)|^q dx, \tag{1.7}$$

où $|A|$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble A. Ces inégalités évidentes si $|A| \in \{0, +\infty\}$ découlent sinon de l'inégalité de Jensen qui assure :

$$\left(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}|a_k|\right)^q \leq \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}|a_k|^q \text{ et } \left(\frac{1}{|A|}\int_A |f(x)|dx\right)^q \leq \frac{1}{|A|}\int_A |f(x)|^q dx.$$

Démonstration : Par l'inégalité triangulaire

$$|X_t - X_s| \leq \left|\int_s^t \sigma(r, X_r)dW_r\right| + \left|\int_s^t b(r, X_r)dr\right|.$$

Avec (1.7) et (1.5), on en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^{2p}\right) &\leq 2^{2p-1}\left[\mathbb{E}\left(\left|\int_s^t \sigma(r, X_r)dW_r\right|^{2p}\right) + \mathbb{E}\left(\left|\int_s^t b(r, X_r)dr\right|^{2p}\right)\right] \\
&\leq C\left[\mathbb{E}\left(\left(\int_s^t |\sigma(r, X_r)|^2 dr\right)^p\right) + (t-s)^{2p-1}\mathbb{E}\left(\int_s^t |b(r, X_r)|^{2p} dr\right)\right] \\
&\leq C\left[(t-s)^{p-1}\int_s^t \mathbb{E}\left(|\sigma(r, X_r)|^{2p}\right)dr + T^p(t-s)^{p-1}\int_s^t \mathbb{E}\left(|b(r, X_r)|^{2p}\right)dr\right].
\end{aligned}$$

On conclut facilement en remarquant que d'après (Lip), (1.7) et le Lemme 1.1.4 sur les moments de X_r,

$$\mathbb{E}\left(|\sigma(r, X_r)|^{2p} + |b(r, X_r)|^{2p}\right) \leq C\mathbb{E}((1 + |X_r|)^{2p}) \leq C2^{2p-1}(1 + \mathbb{E}(|X_r|^{2p}) \leq C(1 + |y|^{2p}).$$

□

1.2 Le schéma d'Euler

On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles de même longueur et pour $k \in \{0, \ldots, N\}$, on pose $t_k = \frac{kT}{N}$. Le schéma d'Euler consiste à discrétiser l'EDS

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt, \ X_0 = y \in \mathbb{R}^n$$

suivant la grille $(t_k)_k$ en posant

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = y \\ \forall 0 \leq k \leq N-1, \ \bar{X}_{t_{k+1}} = \bar{X}_{t_k} + \sigma(t_k, \bar{X}_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + b(t_k, \bar{X}_{t_k})(t_{k+1} - t_k) \end{cases} \tag{1.8}$$

Pour passer d'un instant de discrétisation au suivant on fige les coefficients de diffusion et de dérive à leur valeur au début de l'intervalle. Afin d'implémenter ce schéma, il suffit de savoir simuler les accroissements $(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})_{0 \leq k \leq N-1}$ qui sont i.i.d. suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}_d(0, \frac{T}{N}I_d)$ où I_d désigne la matrice identité de dimension d. Pour effectuer les preuves de convergence, il est commode d'introduire le schéma d'Euler en temps continu défini par

$$\forall 0 \leq k \leq N-1, \ \forall t \in [t_k, t_{k+1}], \ \bar{X}_t = \bar{X}_{t_k} + \sigma(t_k, \bar{X}_{t_k})(W_t - W_{t_k}) + b(t_k, \bar{X}_{t_k})(t - t_k).$$

Bien sûr, même si pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$ et $G \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$ vecteur gaussien centré indépendant de l'accroissement $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ et admettant la matrice identité $d \times d$ comme matrice de covariance, le vecteur aléatoire $\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \sqrt{\frac{(t_{k+1}-t)(t-t_k)}{t_{k+1}-t_k}}G$ a même loi conditionnelle sachant $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ que $W_t - W_{t_k}$, il n'est pas possible de générer la trajectoire du schéma d'Euler en temps continu en plus d'un nombre fini d'instants.
Si pour $s \in [0, T]$, on note $\tau_s = \lfloor \frac{Ns}{T} \rfloor \times \frac{T}{N}$ le dernier instant de discrétisation avant s, on a

$$d\bar{X}_t = \sigma(\tau_t, \bar{X}_{\tau_t})dW_t + b(\tau_t, \bar{X}_{\tau_t})dt, \ \bar{X}_0 = y. \tag{1.9}$$

Lorsqu'il sera important de préciser le nombre N de pas de temps utilisés pour la discrétisation, nous utiliserons la notation $\bar{X}_t^N$.

1.2.1 Vitesse forte

Comme dans le schéma, les coefficients b et σ sont figés à leur valeur au début de chaque pas de temps, pour obtenir un résultat de convergence, il faut introduire une hypothèse de régularité en temps pour ces fonctions.

Théorème 1.2.1. *On suppose que les coefficient σ, b satisfont l'hypothèse (Lip) (voir théorème 1.1.2) et que*

$$\exists \alpha, K > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall (s,t) \in [0,T], \ |\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| + |b(t,x) - b(s,x)| \leq K(1+|x|)(t-s)^\alpha.$$

Alors pour $\beta = \min(\alpha, 1/2)$,

$$\forall p \geq 1, \ \exists C_p > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, \ \forall N \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}\left(\sup_{t \leq T} |X_t - \bar{X}_t^N|^{2p}\right) \leq \frac{C_p(1+|y|^{2p})}{N^{2\beta p}}.$$

En outre si $\gamma < \beta$, $N^\gamma \sup_{t \leq T} |X_t - \bar{X}_t^N|$ converge presque sûrement vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Remarque 1.2.2.

- On a $\| \sup_{t \leq T} |X_t - \bar{X}_t^N| \|_{2p} = \left(\mathbb{E}\left(\sup_{t \leq T} |X_t - \bar{X}_t^N|^{2p}\right)\right)^{\frac{1}{2p}} \leq \frac{C}{N^\beta}$ et on dit que la vitesse forte du schéma d'Euler est en $\frac{1}{N^\beta}$. En particulier lorsque les coefficients de l'EDS ne dépendent pas du temps ou que $\alpha \geq \frac{1}{2}$, la vitesse forte est en $\frac{1}{\sqrt{N}}$.
- Sous des hypothèses de régularité sur $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Kurtz et Protter [29] ont montré que si $(X_t)_{t \in [0,T]}$ est solution de l'équation différentielle stochastique $dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt$ en dimension $n = d = 1$ avec coefficients homogènes en temps, alors le processus $(\sqrt{N}(X_t - \bar{X}_t^N))_{t \in [0,T]}$ d'erreur renormalisée du schéma d'Euler converge en loi vers $(Y_t)_{t \in [0,T]}$ solution de

$$Y_t = \int_0^t Y_s(\sigma'(X_s)dW_s + b'(X_s)ds) + \sqrt{\frac{T}{2}} \int_0^t \sigma\sigma'(X_s)dB_s$$

  où $(B_t)_{t \in [0,T]}$ est un mouvement brownien indépendant de $(W_t)_{t \in [0,T]}$ (résultat qui se généralise en dimension supérieure). Nous renvoyons au problème du paragraphe 1.8.4 pour une preuve de ce résultat dans le cas particulier du modèle de Black-Scholes. Notons qu'en dehors du cas où le coefficient de diffusion σ est constant, le processus $(Y_t)_{t \in [0,T]}$ est non nul, ce qui signifie que la vitesse de convergence obtenue dans le théorème 1.2.1 est la bonne.

- Lorsque pour $n = d = 1$ on souhaite calculer le prix $\mathbb{E}((\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt - K)^+)$ d'un Call asiatique, on peut introduire $Y_t = \int_0^t X_s ds$ et vérifier qu'appliquer le schéma d'Euler au couple (X,Y) revient à appliquer le schéma d'Euler à X et à poser $\bar{Y}_{t_k}^N = \frac{T}{N}\sum_{j=0}^{k-1}\bar{X}_{t_j}^N$. Comme la fonction $z \to (z-K)^+$ est lipschitzienne de constante 1, on a alors

$$\left|\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt - K\right)^+\right) - \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\bar{X}_{t_j}^N - K\right)^+\right)\right| \leq \frac{1}{T}\mathbb{E}|Y_T - \bar{Y}_T^N| \leq \frac{C}{N^\beta}.$$

En fait, il est bien préférable numériquement d'approcher le prix de l'option asiatique par $\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{N}\left(\frac{\bar{X}_0^N+\bar{X}_T^N}{2}+\sum_{j=1}^{N-1}\bar{X}_{t_j}\right)-K\right)^+\right)$ ce qui revient à approcher l'intégrale $\int_0^T X_t dt$ par la méthode des trapèzes plutôt que par celle des rectangles (voir le paragraphe 1.7).

- Dans le cas $\alpha \geq \frac{1}{2}$, on peut montrer que les vitesses fortes du schéma d'Euler constant par morceaux (pour $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $\bar{X}_t^N = \bar{X}_{t_k}^N$) et du schéma interpolé linéairement (pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $\bar{X}_t^N = [(t_{k+1}-t)\bar{X}_{t_k}^N + (t-t_k)\bar{X}_{t_{k+1}}^N]/(t_{k+1}-t_k)$) sont en $\sqrt{\frac{\log(N)}{N}}$.

Démonstration : On a pour tout $u \in [0,T]$,

$$X_u - \bar{X}_u = \int_0^u \sigma(s,X_s) - \sigma(\tau_s,\bar{X}_{\tau_s})dW_s + \int_0^u b(s,X_s) - b(\tau_s,\bar{X}_{\tau_s})ds.$$

Donc pour $t \in [0,T]$, en utilisant (1.7) et l'inégalité de Burkolder Davis Gundy pour l'intégrale stochastique, on obtient comme dans la preuve de la proposition 1.1.6

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq t}|X_u - \bar{X}_u|^{2p}\right) &\leq 2^{2p-1}\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq t}\left|\int_0^u \sigma(s,X_s) - \sigma(\tau_s,\bar{X}_{\tau_s})dW_s\right|^{2p}\right)\\ &\quad + 2^{2p-1}\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq t}\left|\int_0^u b(s,X_s) - b(\tau_s,\bar{X}_{\tau_s})ds\right|^{2p}\right)\\ &\leq Ct^{p-1}\int_0^t \mathbb{E}\left(|\sigma(s,X_s) - \sigma(\tau_s,\bar{X}_{\tau_s})|^{2p}\right)ds\\ &\quad + 2^{2p-1}t^{2p-1}\int_0^t \mathbb{E}\left(|b(s,X_s) - b(\tau_s,\bar{X}_{\tau_s})|^{2p}\right)ds. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Avec (1.7) et les hypothèses de régularité faites sur les coefficients de l'EDS, on a

$$\begin{aligned}|\sigma(s,X_s) - \sigma(\tau_s,\bar{X}_{\tau_s})|^{2p} &\leq 3^{2p-1}\Big(|\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_{\tau_s})|^{2p} + |\sigma(s,X_{\tau_s}) - \sigma(\tau_s,X_{\tau_s})|^{2p}\\ &\qquad + |\sigma(\tau_s,X_{\tau_s}) - \sigma(\tau_s,\bar{X}_{\tau_s})|^{2p}\Big)\\ &\leq C\left(|X_s - X_{\tau_s}|^{2p} + (1+|X_{\tau_s}|^{2p})(s-\tau_s)^{2p\alpha} + |X_{\tau_s} - \bar{X}_{\tau_s}|^{2p}\right).\end{aligned}$$

En utilisant (1.6), (1.4) et $0 \leq s - \tau_s \leq \frac{T}{N}$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(|\sigma(s,X_s) - \sigma(\tau_s,\bar{X}_{\tau_s})|^{2p}\right) \leq C\left(\frac{1+|y|^{2p}}{N^p} + \frac{1+|y|^{2p}}{N^{2\alpha p}} + \mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s}|X_u - \bar{X}_u|^{2p}\right)\right).$$

Cette inégalité reste vraie en remplaçant σ par b au membre de gauche et avec (1.10), on en déduit

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq t}|X_u-\bar{X}_u|^{2p}\right)\leq C\left(\frac{1+|y|^{2p}}{N^{2(\alpha\wedge\frac{1}{2})p}}+\int_0^t\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq s}|X_u-\bar{X}_u|^{2p}\right)ds\right).$$

La première assertion du théorème découle alors du lemme de Gronwall. Pour rendre l'argument qui précède rigoureux, il aurait fallu utiliser une technique de localisation, par exemple avec les temps d'arrêt $\nu_m=\inf\{t\geq 0 : |X_t-\bar{X}_t|\geq m\}$ qui sont tels que $\mathbb{E}\left(\sup_{u\leq t}|X_{u\wedge\nu_m}-\bar{X}_{u\wedge\nu_m}|^{2p}\right)<+\infty$.

Pour $\gamma<\beta$,

$$\mathbb{E}\left(\left(N^\gamma\sup_{u\leq T}|X_u-\bar{X}_u|\right)^{2p}\right)\leq\frac{C}{N^{2(\beta-\gamma)p}}.$$

On choisit $p>\frac{1}{2(\beta-\gamma)}$, ce qui assure que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{N\geq 1}\left(N^\gamma\sup_{u\leq T}|X_u-\bar{X}_u|\right)^{2p}\right)<+\infty \text{ puis } \mathbb{P}\left(\sum_{N\geq 1}\left(N^\gamma\sup_{u\leq T}|X_u-\bar{X}_u|\right)^{2p}<+\infty\right)=1.$$

Comme le terme général d'une série convergente tend vers 0, on conclut que $N^\gamma\sup_{u\leq T}|X_u-\bar{X}_u|$ converge presque sûrement vers 0 lorsque N tend vers l'infini. □

1.3 Vitesse faible :

Lorsque l'on souhaite calculer $\mathbb{E}(f(X_T))$ pour f une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz K, le théorème 1.2.1 assure que

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(f(X_T))-\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N))|&\leq\mathbb{E}(|f(X_T)-f(\bar{X}_T^N)|)\leq\sqrt{\mathbb{E}(|f(X_T)-f(\bar{X}_T^N)|^2)}\\&\leq K\sqrt{\mathbb{E}(|X_T-\bar{X}_T^N|^2)}\leq\frac{C}{N^\beta}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Mais la première inégalité qui consiste à majorer la valeur absolue de la différence des espérances par l'espérance de la valeur absolue de la différence est très grossière. En fait, la question de savoir si $\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N))$ est proche de $\mathbb{E}(f(X_T))$ revient à se demander si la loi de $\bar{X}_T^N$ est proche de celle de X_T. On va donc s'intéresser au problème de la convergence en loi du schéma d'Euler. La convergence en loi est une convergence contre des fonctions tests comme la fonction f introduite plus haut. C'est pourquoi on parle de convergence faible. Le résultat suivant a été démontré par Talay et Tubaro [46].

Théorème 1.3.1. *On suppose que b,σ sont des fonctions C^∞ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ avec des dérivées de tous ordres bornées et que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est C^∞ avec des dérivées à croissance polynomiale :*

$$\forall a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}^n,\ \exists p,C>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \left|\frac{\partial^{a_1+\ldots+a_n}f}{\partial x_1^{a_1}\ldots\partial x_n^{a_n}}(x)\right|\leq C(1+|x|^p).$$

Alors il existe une suite $(C_l)_{l\geq 1}$ de réels telle que pour tout $L \in \mathbb{N}^*$, on a un développement de l'erreur de la forme

$$\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \frac{C_1}{N} + \frac{C_2}{N^2} + \ldots + \frac{C_L}{N^L} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{L+1}}\right).$$

Remarque 1.3.2. • En particulier cela implique que $|\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T))| \leq \frac{C}{N}$ alors qu'utiliser la vitesse forte et le caractère lipschitzien de f conduit à majorer $|\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T))|$ par $\frac{C}{\sqrt{N}}$ ($\alpha = 1$ dans le théorème 1.2.1 sous les hypothèses faites ici sur b et σ).

- On peut obtenir la majoration $|\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T))| \leq \frac{C}{N}$ (sans développement de l'erreur) en supposant simplement σ, b C^4 avec des dérivées bornées et f C^4 avec des dérivées à croissance polynomiales.

- **Extrapolation de Romberg (Richardson) :** On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(2f(\bar{X}_T^{2N}) - f(\bar{X}_T^N)\right) &- \mathbb{E}(f(X_T)) \\
&= 2\left(\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^{2N}) - \mathbb{E}(f(X_T))\right) - \left(\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N) - \mathbb{E}(f(X_T))\right) \\
&= 2\left(\frac{C_1}{2N} + \frac{C_2}{4N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right) - \left(\frac{C_1}{N} + \frac{C_2}{N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right) \\
&= -\frac{C_2}{2N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right).
\end{aligned}$$

En calculant l'espérance de la combinaison linéaire $2f(\bar{X}_T^{2N}) - f(\bar{X}_T^N)$, on fait disparaître le terme principal de l'erreur et on obtient une vitesse faible en $\frac{1}{N^2}$. Notons que comme $f(\bar{X}_T^{2N})$ est proche de $f(\bar{X}_T^N)$ pour N grand, on peut penser que Cov $(f(\bar{X}_T^{2N}), f(\bar{X}_T^N)) \geq 0$. Il est préférable en termes de variance d'utiliser les mêmes accroissements browniens pour générer $\bar{X}_T^{2N}$ et $\bar{X}_T^N$ plutôt que d'utiliser des accroissements indépendants pour les deux schémas. En fait, on déduit facilement du théorème 1.2.1 que Var $(2f(\bar{X}_T^{2N}) - f(\bar{X}_T^N)) \to$ Var $(f(X_T))$ lorsque $N \to +\infty$.
Cette technique d'extrapolation de Romberg se généralise de la façon suivante (voir [42]) : pour tout $l \geq 2$,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{m=1}^{l} \frac{(-1)^{l-m} m^l}{m!(l-m)!} f(\bar{X}_T^{mN})\right) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \frac{(-1)^{l-1} C_l}{l! N^l} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^{l+1}}\right).$$

De même que précédemment, pour éviter que la variance n'explose, il faut utiliser les mêmes accroissements browniens pour générer $(\bar{X}_T^{mN})_{1\leq m\leq l}$. Il suffit d'itérer N fois la procédure utilisée à cet effet sur l'intervalle de temps $[0, T/N]$. Plutôt que de générer $(W_{kT/N\text{ppcm}(1,\ldots,l)}, 0 \leq k \leq \text{ppcm}(1, \ldots, l))$, il s'avère plus économique surtout lorsque l est grand de générer $(W_{kT/mN}, 1 \leq k \leq m, 1 \leq m \leq l, \text{pgcd}(k, m) = 1)$. Par exemple, si $l = 4$, on se donne $G_1, \ldots, G_6$ six vecteurs gaussiens centrés réduits indépendants à valeurs dans

$\mathbb{R}^d$ et on pose

$$\begin{aligned}
W_{\frac{T}{4N}} &= \sqrt{\frac{T}{4N}}G_1 \\
W_{\frac{T}{3N}} &= \sqrt{\frac{T}{4N}}G_1 + \sqrt{\frac{T}{12N}}G_2 \\
W_{\frac{T}{2N}} &= \sqrt{\frac{T}{4N}}G_1 + \sqrt{\frac{T}{12N}}G_2 + \sqrt{\frac{T}{6N}}G_3 \\
W_{\frac{2T}{3N}} &= \sqrt{\frac{T}{4N}}G_1 + \sqrt{\frac{T}{12N}}G_2 + \sqrt{\frac{T}{6N}}(G_3 + G_4) \\
W_{\frac{3T}{4N}} &= \sqrt{\frac{T}{4N}}G_1 + \sqrt{\frac{T}{12N}}(G_2 + G_5) + \sqrt{\frac{T}{6N}}(G_3 + G_4) \\
W_{\frac{T}{N}} &= \sqrt{\frac{T}{4N}}(G_1 + G_6) + \sqrt{\frac{T}{12N}}(G_2 + G_5) + \sqrt{\frac{T}{6N}}(G_3 + G_4).
\end{aligned}$$

La preuve du théorème utilise la régularité de la solution de l'Équation aux Dérivées Partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ u(T,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.12}$$

où $a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^*(t,x)$ $(\forall i,j \in \{1,\dots,n\},\ a_{ij}(t,x) = \sum_{l=1}^d \sigma_{il}(t,x)\sigma_{jl}(t,x))$. Cette régularité est assurée par le résultat suivant.

Proposition 1.3.3. *Sous les hypothèses du théorème,* (1.12) *admet une unique solution. En outre, cette solution est C^∞ avec des dérivées à croissance polynomiale. Enfin, pour $(X_t)_{t\in[0,T]}$ solution de* (1.3)

$$\boxed{u(0,y) = \mathbb{E}(f(X_T)).} \tag{1.13}$$

Démonstration : Nous nous contenterons de démontrer l'égalité (1.13). Par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} u(T,X_T) = u(0,X_0) &+ \int_0^T \nabla_x u(s,X_s).\sigma(s,X_s)dW_s \\ &+ \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b.\nabla_x u\right)(s,X_s)ds. \end{aligned} \tag{1.14}$$

D'après (1.12), $u(T,X_T) = f(X_T)$ et l'intégrale en ds au second membre est nulle. Comme $X_0 = y$, $u(0,X_0) = u(0,y)$. Enfin la régularité de σ et u assure que la fonction $\sigma^*(s,x)\nabla_x u(s,x)$ est à croissance polynomiale en x. Avec le contrôle des moments de la solution de l'EDS donné par le lemme 1.1.4, on en déduit que $\mathbb{E}\left(\int_0^T |\sigma^*(s,X_s)\nabla_x u(s,X_s)|^2 ds\right) < +\infty$, ce qui entraîne que l'intégrale stochastique $\int_0^T \nabla_x u(s,X_s).\sigma(s,X_s)dW_s$ est d'espérance nulle. Il suffit donc de prendre l'espérance dans l'égalité (1.14) pour obtenir (1.13). □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.3.1.

Démonstration : Nous nous plaçons en dimension $n = d = 1$ pour simplifier et nous allons seulement faire apparaître le premier terme du développement de l'erreur. D'après la condition terminale dans (1.12) et d'après (1.13),

$$\mathbb{E}(f(\bar{X}_T)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \mathbb{E}(u(T,\bar{X}_T)) - u(0,y) = \mathbb{E}\left(u(T,\bar{X}_T) - u(0,\bar{X}_0)\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}_k \tag{1.15}$$

avec $\mathcal{E}_k = \mathbb{E}\left(u(t_{k+1},\bar{X}_{t_{k+1}}) - u(t_k,\bar{X}_{t_k})\right)$.
Comme sur $[t_k,t_{k+1}]$, $d\bar{X}_t = \sigma(t_k,\bar{X}_{t_k})dW_t + b(t_k,\bar{X}_{t_k})dt$, la formule d'Itô assure que

$$\begin{aligned} u(t_{k+1},\bar{X}_{t_{k+1}}) - u(t_k,\bar{X}_{t_k}) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(t_k,\bar{X}_{t_k})\frac{\partial u}{\partial x}(t,\bar{X}_t)dW_t \\ &+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,\bar{X}_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t_k,\bar{X}_{t_k})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\bar{X}_t) + b(t_k,\bar{X}_{t_k})\frac{\partial u}{\partial x}(t,\bar{X}_t)dt \end{aligned}$$

En combinant la croissance polynomiale en x des fonctions $\sigma(t_k,x)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$ avec le contrôle des moments du schéma d'Euler déduit du lemme 1.1.4 et du théorème 1.2.1 sur la vitesse forte, on obtient que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle. On en déduit que

$$\mathcal{E}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}\left(f_k(t,\bar{X}_t)\right)dt \text{ où } f_k(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma_k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + b_k\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

où $\sigma_k = \sigma(t_k,\bar{X}_{t_k})$ et $b_k = b(t_k,\bar{X}_{t_k})$. Comme en écrivant la première ligne de (1.12) au point $(t,x) = (t_k,\bar{X}_{t_k})$, on a $f_k(t_k,\bar{X}_{t_k}) = 0$, la formule d'Itô assure comme précédemment que pour $t \in [t_k,t_{k+1}]$,

$$\mathbb{E}\left(f_k(t,\bar{X}_t)\right) = \int_{t_k}^{t} \mathbb{E}\left(\frac{\partial f_k}{\partial t}(s,\bar{X}_s) + \frac{1}{2}\sigma_k^2\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}(s,\bar{X}_s) + b_k\frac{\partial f_k}{\partial x}(s,\bar{X}_s)\right)ds.$$

Ainsi, en remarquant que pour toute fonction g intégrable, $\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t} g(s)dsdt = \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-s)g(s)ds$, il vient

$$\mathcal{E}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-s)\mathbb{E}\left(\frac{\partial f_k}{\partial t}(s,\bar{X}_s) + \frac{1}{2}\sigma_k^2\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}(s,\bar{X}_s) + b_k\frac{\partial f_k}{\partial x}(s,\bar{X}_s)\right)ds.$$

Avec la régularité des fonctions u, σ et b, l'espérance dans l'intégrale est bornée ce qui implique que

$$|\mathcal{E}_k| \leq C\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-s)ds = \frac{CT^2}{2N^2}$$

En reportant cette inégalité dans (1.15), on obtient que $|\mathbb{E}(f(\bar{X}_T)) - \mathbb{E}(f(X_T))| \leq \frac{CT^2}{2N}$.
Pour faire apparaître le premier terme du développement de l'erreur, on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial t}(s,\bar{X}_s) + \frac{1}{2}\sigma_k^2\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}(s,\bar{X}_s) + b_k\frac{\partial f_k}{\partial x}(s,\bar{X}_s) &\simeq \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\sigma_k^2}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} + b_k\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)(t_k,\bar{X}_{t_k}) \\ &+ \frac{\sigma_k^2}{2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} + \frac{\sigma_k^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + b_k\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)(t_k,\bar{X}_{t_k}) \\ &+ b_k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} + \frac{\sigma_k^2}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + b_k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t_k,\bar{X}_{t_k}). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{E}_k \simeq \frac{T^2}{2N^2}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma_k^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + 2b_k \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\sigma_k^4}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \sigma_k^2 b_k \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + b_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t_k, \bar{X}_{t_k})\right].$$

On conclut alors que $\mathbb{E}(f(\bar{X}_T)) - \mathbb{E}(f(X_T))$ est équivalent à

$$\frac{T}{2N}\int_0^T \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\sigma^4}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \sigma^2 b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t, X_t)\right] dt.$$

□

En vue d'applications en finance, l'hypothèse de régularité faite sur f dans le théorème 1.3.1 n'est pas satisfaisante car les fonctions de payoff $x \to (x-K)^+$ et $x \to (K-x)^+$ du Call et du Put ne sont pas des fonctions C^1. Dans le cas de coefficients $\sigma(t,x) = \sigma(x)$ et $b(t,x) = b(x)$ homogènes en temps et C^∞ à dérivées bornées, Bally et Talay [6] [7] ont montré que l'on conserve un développement de l'erreur

$$\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \frac{C_1}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \tag{1.16}$$

pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mesurable bornée dès lors que σ et b satisfont une condition de non dégénérescence. L'outil utilisé, le calcul de Malliavin, dépasse le cadre de ce cours. La condition de non-dégénerescence assure que X_T admet une densité C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Elle est impliquée par la condition d'uniforme ellipticité suivante :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi^* \sigma(x)\sigma^*(x)\xi \geq \varepsilon|\xi|^2.$$

Sous cette condition d'uniforme ellipticité, Guyon [20] a démontré que le développement (1.16) reste vrai lorsque f est une distribution tempérée, le terme $\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N))$ (resp. $\mathbb{E}(f(X_T))$) s'interprétant alors comme $< f, \rho_N >$ (resp. $< f, \rho >$) où ρ_N (resp. ρ) désigne la densité de $\bar{X}_T^N$ (resp. X_T). En particulier, f peut être choisie mesurable à croissance polynomiale, égale à une masse de Dirac ou à une dérivée de masse de Dirac.

Moralement, pour obtenir un développement de l'erreur faible du schéma d'Euler, il faut donc soit que la fonction f soit très régulière soit que la densité de X_T le soit.

Lorsque l'on s'intéresse à une option exotique dont le payoff dépend de la trajectoire du sous-jacent pas simplement au travers de sa valeur terminale X_T, l'analyse de l'erreur faible developpée dans ce paragraphe ne s'applique plus. Si $F : C([0,T], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est lispchitzienne de constante de Lipschitz $Lip(F)$ lorsque $C([0,T], \mathbb{R})$ est muni de la norme sup, on peut généraliser (1.11) en

$$\left|\mathbb{E}[F((X_t)_{t\in[0,T]})] - \mathbb{E}[F((\bar{X}_t^N)_{t\in[0,T]})]\right| \leq \mathbb{E}\left|F((X_t)_{t\in[0,T]}) - F((\bar{X}_t^N)_{t\in[0,T]})\right| \leq \frac{C}{N^\beta}$$

mais il n'y aucune raison pour que cette inégalité donne la bonne vitesse de convergence. L'analyse d'erreur faible a été généralisée pour des options exotiques particulières dont le payoff se met sous la forme $F((X_t)_{t\in[0,T]}) = f(X_T, Y_T)$ avec Y_t une fonction de $(X_s)_{0\leq s\leq t}$ telle que le couple $((X_t, Y_t))_{0\leq t\leq T}$ reste Markovien, si bien que l'on dispose toujours d'une équation aux dérivées partielles de pricing. Les cas $Y_t = \int_0^t X_s ds$ et $Y_t = \max_{0\leq s\leq t} X_s$ correspondent respectivement aux options sur moyenne [48] et aux options barrières [17, 18, 19] ou lookback.

La théorie du transport optimal a permis d'obtenir un résultat qui s'applique à des payoffs lipschitziens quelconques [3]

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon < +\infty,\ \forall N \geq 1,\ \sup_{F:Lip(F)\leq 1} \left|\mathbb{E}[F((X_t)_{t\in[0,T]})] - \mathbb{E}[F((\bar{X}_t^N)_{t\in[0,T]})]\right| \leq \frac{C_\varepsilon}{N^{2/3-\varepsilon}}$$

dans le cas de l'équation différentielle stochastique $dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt$ en dimension $n = d = 1$ avec les fonctions σ et b respectivement C^4 et C^3 bornées ainsi que leurs dérivées et vérifiant $\inf_{x\in\mathbb{R}} \sigma^2(x) > 0$.

1.4 Le schéma de Milshtein

Comme la possibilité de faire des extrapolations de Romberg permet de construire à partir du schéma d'Euler des schémas d'ordre de convergence (puissance de $1/N$ dans le terme principal de l'erreur) faible arbitrairement élevé, il semble plus intéressant d'essayer d'améliorer l'ordre de convergence forte du schéma d'Euler plutôt que l'ordre de convergence faible. Le schéma de Milshtein est obtenu en rajoutant des termes au schéma d'Euler et sa vitesse de convergence forte est en $\frac{1}{N}$ au lieu de $\frac{1}{\sqrt{N}}$ pour le schéma d'Euler (cas $\alpha = \frac{1}{2}$ dans les hypothèses du théorème 1.2.1).

1.4.1 Le cas de la dimension 1

On suppose $n = d = 1$ et on se place dans le cas homogène en temps $\sigma(t,x) = \sigma(x)$ et $b(t,x) = b(x)$. On souhaite discrétiser l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt,\ X_0 = y \in \mathbb{R}.$$

Sur l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1}]$,

$$X_t = X_{t_k} + \int_{t_k}^t \sigma(X_s)dW_s + \int_{t_k}^t b(X_s)ds.$$

Comme

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_k}^t \sigma(X_s)dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_{t_k}^t \sigma^2(X_s)ds\right) \sim C(t-t_k)$$
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_k}^t b(X_s)ds\right)^2\right] \leq (t-t_k)\mathbb{E}\left(\int_{t_k}^t b^2(X_s)ds\right) \sim C(t-t_k)^2$$

on voit que le terme d'intégrale stochastique est dominant lorsque le pas de temps est petit. Donc pour améliorer la convergence du schéma, il faut améliorer la discrétisation de ce terme d'intégrale stochastique. Pour cela on remarque que

$$\sigma(X_s) \simeq \sigma(X_{t_k}) + \sigma'(X_{t_k})(X_s - X_{t_k}) \simeq \sigma(X_{t_k}) + \sigma'(X_{t_k})\sigma(X_{t_k})(W_s - W_{t_k}).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{t_k}^t \sigma(X_s)dW_s &\simeq \sigma(X_{t_k})\int_{t_k}^t dW_s + \sigma'(X_{t_k})\sigma(X_{t_k})\int_{t_k}^t (W_s - W_{t_k})dW_s \\ &= \sigma(X_{t_k})(W_t - W_{t_k}) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(X_{t_k})\left((W_t - W_{t_k})^2 - (t-t_k)\right).\end{aligned}$$

Le schéma de Milshtein repose sur ce développement :

$$\begin{cases} \tilde{X}_0 = y \text{ et pour } k \in \{0,\dots,N-1\},\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}], \\ \tilde{X}_t = \tilde{X}_{t_k} + \sigma(\tilde{X}_{t_k})(W_t - W_{t_k}) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(\tilde{X}_{t_k})\left((W_t - W_{t_k})^2 - (t-t_k)\right) + b(\tilde{X}_{t_k})(t-t_k) \end{cases}. \tag{1.17}$$

Pour générer le schéma aux instants de discrétisation $(\tilde{X}_{t_k})_{0\leq k\leq N}$, il suffit à nouveau de générer les accroissements $(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})_{0\leq k\leq N-1}$ qui sont i.i.d. suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}_1(0, \frac{T}{N})$. La vitesse forte du schéma est donnée par le résultat dont la démonstration fait l'objet du problème du paragraphe 1.8.5.

Théorème 1.4.1. *On suppose que les coefficients σ et b sont C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$\forall p \geq 1,\ \exists C_p > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T} |X_t - \tilde{X}_t^N|^{2p}\right) \leq \frac{C_p}{N^{2p}}.$$

En outre $\forall \gamma < 1$, $N^\gamma \sup_{t\leq T} |X_t - \tilde{X}_t^N|$ converge presque sûrement vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Remarque 1.4.2.
- Lorsque la fonction σ est constante, le schéma de Milshtein coïncide avec le schéma d'Euler et la vitesse forte de ce dernier est donc en $\frac{C}{N}$.
- Pour éviter de calculer analytiquement la dérivée de σ, Newton [37] a proposé le schéma suivant qui a également une vitesse forte en $\frac{C}{N}$:

$$\begin{cases} \hat{X}_0 = y \text{ et pour } k \in \{0,\dots,N-1\}, \\ \hat{X}_{t_{k+1}} = \hat{X}_{t_k} + b(\hat{X}_{t_k})(t_{k+1}-t_k) - \sigma(\hat{X}_{t_k})\sqrt{t_{k+1}-t_k} + \sigma_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k} + \sqrt{t_{k+1}-t_k}) \\ \text{où } \sigma_k = \sigma\left(\hat{X}_{t_k} + \frac{1}{2}\sigma(\hat{X}_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k} - \sqrt{t_{k+1}-t_k})\right). \end{cases}$$

  Comme $\sigma_k \simeq \sigma(\hat{X}_{t_k}) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(\hat{X}_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k} - \sqrt{t_{k+1}-t_k})$, ce schéma est très proche du schéma de Milshtein.

1.4.2 Le cas général

On effectue la même correction qu'en dimension 1 mais les notations sont plus lourdes. Pour $s \in [t_k, t_{k+1}]$ et $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,d\}$, on a

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(X_s) &\simeq \sigma_{ij}(X_{t_k}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}(X_{t_k})(X_s^l - X_{t_k}^l) \\ &\simeq \sigma_{ij}(X_{t_k}) + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}(X_{t_k}) \sum_{m=1}^d \sigma_{lm}(X_{t_k})(W_s^m - W_{t_k}^m). \end{aligned}$$

On introduit les notations

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} \sigma_{1j} \\ \vdots \\ \sigma_{nj} \end{pmatrix} \text{ et } \partial\sigma_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

pour la j-ième colonne de σ et pour la matrice $\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}\right)_{1\leq i,l\leq n}$. Cela permet de récrire le développement précédent sous forme vectorielle :

$$\sigma_j(X_s) \simeq \sigma_j(X_{t_k}) + \sum_{m=1}^{d} \partial\sigma_j\sigma_m(X_{t_k})(W_s^m - W_{t_k}^m).$$

Dans $\sigma(X_s)dW_s = \sum_{j=1}^d \sigma_j(X_s)dW_s^j$, la j-ème colonne de σ vient multiplier dW_s^j. Donc

$$\sigma(X_s)dW_s \simeq \sigma(X_{t_k})dW_s + \sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{m=1}^{d} \partial\sigma_j\sigma_m(X_{t_k})(W_s^m - W_{t_k}^m)\right)dW_s^j.$$

Le schéma de Milshtein s'écrit donc :

$$\begin{cases} X_0 = y \text{ et pour } k \in \{0,\dots,N-1\},\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}], \\ \tilde{X}_t = \tilde{X}_{t_k} + \sigma(\tilde{X}_{t_k})(W_t - W_{t_k}) + \sum_{j,m=1}^d \partial\sigma_j\sigma_m(\tilde{X}_{t_k}) \int_{t_k}^t (W_s^m - W_{t_k}^m)dW_s^j \\ \qquad + b(\tilde{X}_{t_k})(t-t_k). \end{cases} \tag{1.19}$$

Pour implémenter en pratique le schéma, on rencontre le problème suivant : pour $j \neq m$, on ne sait pas simuler $\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_s^m - W_{t_k}^m)dW_s^j$. Le seul cas où on sait mettre en œuvre le schéma est celui où la condition de **commutativité** suivante est satisfaite :

$\forall j,m \in \{1,\dots,d\}$, $\partial\sigma_j\sigma_m = \partial\sigma_m\sigma_j$

$$\text{i.e. } \forall i \in \{1,\dots,n\},\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}(x)\sigma_{lm}(x) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{im}}{\partial x_l}(x)\sigma_{lj}(x).$$

En effet comme pour $m \neq j$, $\int_{t_k}^t (W_s^m - W_{t_k}^m)dW_s^j + \int_{t_k}^t (W_s^j - W_{t_k}^j)dW_s^m = (W_t^m - W_{t_k}^m)(W_t^j - W_{t_k}^j)$, sous la condition de commutativité,

$$\begin{aligned}\sum_{j,m=1}^{d} \partial\sigma_j\sigma_m(\tilde{X}_{t_k})\int_{t_k}^t (W_s^m - W_{t_k}^m)dW_s^j &= \sum_{j=1}^{d} \partial\sigma_j\sigma_j(X_{t_k})\frac{1}{2}\left((W_t^j - W_{t_k}^j)^2 - (t-t_k)\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{d}\sum_{m=1}^{j-1} \partial\sigma_j\sigma_m(\tilde{X}_{t_k})(W_t^m - W_{t_k}^m)(W_t^j - W_{t_k}^j) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j,m=1}^{d} \partial\sigma_j\sigma_m(\tilde{X}_{t_k})(W_t^m - W_{t_k}^m)(W_t^j - W_{t_k}^j) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \partial\sigma_j\sigma_j(X_{t_k})(t-t_k).\end{aligned}$$

Et le schéma ne fait plus intervenir que les accroissements $(W_t - W_{t_k})$.
Que la condition de commutativité soit satisfaite ou non, le résultat de convergence énoncé en dimension 1 dans le théorème 1.4.1 reste valable.

Remarque 1.4.3.
- Une condition suffisante de commutativité est que la dimension d du mouvement brownien soit égale à 1.
- Comme la condition de commutativité fait intervenir des dérivées des coefficients de la matrice de diffusion σ, elle est également vérifiée lorsque σ est constante. Dans ce cas, les schémas d'Euler et de Milshtein coincident et la vitesse forte du schéma d'Euler est en $\frac{C}{N}$.

- Lorsque la dimension d du mouvement Brownien est égale à 2, on dispose d'une expression pour la fonction caractéristique du triplet $(W_t^1, W_t^2, \int_0^t W_s^1 dW_s^2 - \int_0^t W_s^2 dW_s^1)$. Gaines et Lyons [13] ont tiré parti de cette expression pour construire une technique de simulation du triplet. Comme
$$\int_0^t W_s^1 dW_s^2 = \frac{1}{2}\left(W_t^1 W_t^2 + \int_0^t W_s^1 dW_s^2 - \int_0^t W_s^2 dW_s^1\right),$$
générer le triplet permet ensuite d'implémenter le schéma de Milshtein.

- Parmi les développements récents concernant la discrétisation des EDS, on peut également citer la technique de simulation exacte en dimension $n = d = 1$ proposée récemment par Beskos Papaspiliopoulos et Roberts [9] et qui fait l'objet du problème du paragraphe 1.8.10.

- La méthode de Monte Carlo multipas proposée par Giles [14] et étudiée dans le problème du paragraphe 1.8.6 permet de tirer partie des propriétés de convergence forte du schéma pour réduire la variance tout en contrôlant le biais grâce à l'analyse de l'erreur faible. Pour tirer pleinement partie de cette méthode, Giles et Szpruch [15] ont récemment proposé un schéma tel que la différence entre le schéma sur une grille grossière et la demi-somme, sur la grille de pas moitié, du schéma et du schéma dit antithétique où les accroissements browniens d'indices impairs et pairs sont échangés converge à l'ordre fort 1. Ce schéma est également étudié dans le paragraphe 1.8.6.

1.5 Schémas d'ordre faible élevé

On a vu que pour obtenir un schéma d'ordre fort égal à 1, il faut faire intervenir des intégrales itérées d'ordre 2 du mouvement brownien $\int_{t_k}^t (W_s^m - W_{t_k}^m) dW_s^j$ que l'on ne sait pas simuler pour $m \neq j$. À l'aide de développements de Taylor stochastiques, on peut construire des schémas d'ordre fort plus élevé (voir [25]) qui font intervenir des intégrales itérées d'ordre supérieur que l'on sait encore moins simuler. En remplaçant ces intégrales itérées par des variables aléatoires définies sur un espace fini et qui ont mêmes moments jusqu'à un certain ordre, Kuzuoka [30] [31] a récemment introduit une nouvelle classe de schémas d'ordre faible élevé. Cette classe de schémas et son application en finance font l'objet d'une recherche active [33] [38] [39]. Ninomiya et Victoir [40] et Ninomiya et Ninomiya [41] ont récemment proposé une autre approche très intéressante : l'évolution de leurs schémas de discrétisation sur un pas de temps s'obtient en intégrant des équations différentielles ordinaires construites à partir des coefficients de l'EDS sur des horizons aléatoires bien choisis (voir le problème du paragraphe 1.8.13). Notons également les travaux d'Alfonsi [2] et de Tanaka et Kohatsu-Higa [47] sur la composition de schémas avec des applications respectives au modèle à volatilité stochastique d'Heston et à des modèles à sauts.

1.5.1 Développements de Taylor stochastiques

Pour effectuer ces développements, il est beaucoup plus pratique de récrire l'EDS $X_t = y + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s + \int_0^t b(X_s) ds$ en remplaçant l'intégrale stochastique d'Itô par une intégrale de Stratonovich. L'intérêt est que les règles du calcul différentiel ordinaire s'appliquent lorsque l'on considère des intégrales de Stratonovich : il n'y a plus de terme faisant intervenir des dérivées secondes à ajouter. Nous rappelons que pour un processus unidimensionnel adapté régulier $(H_s)_{s\leq T}$ et pour $t \in [0,T]$, l'intégrale de Stratonovich $\int_0^t H_s \circ dW_s^j$ est égale à la limite en probabilité de $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}(H_{t_{k+1}\wedge t} + H_{t_k\wedge t})(W^j_{t_{k+1}\wedge t} - W^j_{t_k\wedge t})$ lorsque $N \to +\infty$. Ainsi

$$\int_0^t H_s \circ dW_s^j = \int_0^t H_s dW_s^j + \frac{1}{2} < H, W^j >_t .$$

L'EDS se récrit donc

$$X_t = y + \int_0^t \sigma_0(X_s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(X_s) \circ dW_s^j \tag{1.20}$$

où $\sigma_0 = b - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \partial\sigma_j\sigma_j$ avec la matrice $\partial\sigma_j$ et le vecteur σ_j définis dans (1.18).
Introduisons les opérateurs différentiels $V_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}\partial_{x_i}$ pour $0 \leq j \leq d$: pour une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ régulière, on note $V_j g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $V_j g(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(x)\partial_{x_i} g(x)$. Comme les règles du calcul différentiel usuel s'appliquent pour les integrales de Stratonovich, pour f une fonction régulière sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$f(X_t) = f(y) + \int_0^t V_0 f(X_s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t V_j f(X_s) \circ dW_s^j = f(y) + \sum_{j=0}^d \int_0^t V_j f(X_s) \circ dW_s^j,$$

où on pose $W_s^0 = s$.
En remarquant que $V_j f(X_s) = V_j f(y) + \sum_{l=0}^d \int_0^s V_l V_j f(X_u) \circ dW_u^l$, on obtient

$$f(X_t) = f(y) + \sum_{j=0}^d V_j f(y) \int_0^t \circ dW_s^j + \sum_{j,l=0}^d \int_{0\leq u\leq s\leq t} V_l V_j f(X_u) \circ dW_u^l \circ dW_s^j.$$

Par récurrence, on conclut que pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} f(X_t) =& f(y) + \sum_{k=1}^m \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^d V_{j_1}V_{j_2}\ldots V_{j_k} f(y) W_t^{(j_1,\ldots,j_k)} \\ &+ \sum_{j_1,\ldots,j_{m+1}=0}^d \int_{0\leq s_1\leq\ldots\leq s_{m+1}\leq t} V_{j_1}\ldots V_{j_{m+1}} f(X_{s_1}) \circ dW_{s_1}^{j_1} \circ \ldots \circ dW_{s_{m+1}}^{j_{m+1}} \end{aligned}$$

où $W_t^{(j_1,\ldots,j_k)} = \int_{0\leq s_1\leq\ldots\leq s_k\leq t} \circ dW_{s_1}^{j_1} \circ \ldots \circ dW_{s_k}^{j_k}$.
Pour $j \in \{1,\ldots,d\}$, W_s^j est de l'ordre de $\sqrt{s}$ tandis que $W_s^0 = s$. En d'autres termes, pour $t > 0$, $(W_s^0, W_s^1, \ldots, W_s^d)_{s\in[0,t]}$ a même loi que $(tW^0_{\frac{s}{t}}, \sqrt{t}W^1_{s/t}, \ldots, W^d_{s/t})_{s\in[0,t]}$ ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} W_t^{(j_1,\ldots,j_k)} &\overset{\mathcal{L}}{=} t^{(k+\mathrm{Card}\{1\leq l\leq k: j_l=0\})/2} \int_{0\leq s_1\leq\ldots\leq s_k\leq t} \circ dW^{j_1}_{s_1/t} \circ \ldots \circ dW^{j_k}_{s_k/t} \\ &= t^{(k+\mathrm{Card}\{1\leq l\leq k: j_l=0\})/2} \int_{0\leq u_1\leq\ldots\leq u_k\leq 1} \circ dW^{j_1}_{u_1} \circ \ldots \circ dW^{j_k}_{u_k} \\ &= t^{(k+Card\{1\leq l\leq k: j_l=0\})/2} W_1^{(j_1,\ldots,j_k)}. \end{aligned}$$

Ainsi pour obtenir des termes du même ordre dans le développement de Taylor précédent, il faut compter les intégrales par rapport à W^0 deux fois.
C'est pourquoi pour $\alpha = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{A} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} \{0, \ldots, d\}^l$, on pose $|\alpha| = k$ et $\|\alpha\| = k + \mathrm{Card}\{1 \leq l \leq k : j_l = 0\}$. On écrit enfin

$$
\begin{aligned}
f(X_t) =& f(y) + \sum_{\alpha : 1 \leq \|\alpha\| \leq m} V_{j_1} \ldots V_{j_k} f(y) W_t^\alpha + R_{m,f}^{W,y}(t) \text{ où} \qquad (1.21)\\
R_{m,f}^{W,y}(t) =& \sum_{\alpha : |\alpha| \leq m, \|\alpha\| > m} V_{j_1} \ldots V_{j_k} f(y) W_t^\alpha \\
&+ \sum_{j_1, \ldots, j_{m+1} = 0}^{d} \int_{0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_{m+1} \leq t} V_{j_1} \ldots V_{j_{m+1}} f(X_{s_1}) \circ dW_{s_1}^{j_1} \circ \ldots \circ dW_{s_{m+1}}^{j_{m+1}}.
\end{aligned}
$$

Comme le reste $R_{m,f}^{W,y}(t)$ ne comporte que des termes qui se comportent comme t à une puissance supérieure ou égale à $(m+1)/2$, le résultat suivant dont la preuve se trouve dans [25] n'est pas surprenant.

Proposition 1.5.1. *Lorsque les fonctions f, b et σ sont suffisamment régulières, le reste $R_{m,f}^{W,y}(t)$ est tel que pour $p \geq 1$, $\mathbb{E}(|R_{m,f}^{W,y}(t)|^{2p})^{\frac{1}{2p}} \leq C t^{\frac{m+1}{2}}$ où la constante C dépend de m, p, f, b et σ mais pas de t.*

1.5.2 Schémas d'ordre faible élevé

La simulation des intégrales browniennes itérées W_t^α pose problème. Pour lever cette difficulté et obtenir des schémas implémentables, Kusuoka [30] [31] propose de remplacer les intégrales itérées qui apparaissent dans le développement de Taylor stochastique (1.21) par des variables aléatoires qui ont les mêmes moments jusqu'à l'ordre m.

Définition 1.5.2. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une famille $(\zeta^\alpha)_{\|\alpha\| \leq m}$ de variables aléatoires avec des moments de tous ordres finis préserve les moments jusqu'à l'ordre m si*

$$
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \|\alpha_1\| + \ldots + \|\alpha_k\| \leq m,\ \mathbb{E}\left(\prod_{l=1}^{k} \zeta^{\alpha_l}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{l=1}^{k} W_1^{\alpha_l}\right). \qquad (1.22)
$$

L'exemple suivant est tiré de [39] où d'autres familles préservant les moments sont également données.

Exemple 1.5.3. Soit η t.q. $\mathbb{P}(\eta = 0) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(\eta = \pm\sqrt{3}) = \frac{1}{6}$.
On obtient une famille qui préserve les moments jusqu'à l'ordre 5 en dimension $d = 1$ en posant

$$
\begin{aligned}
&\zeta^0 = 1,\ \zeta^1 = \eta,\ \zeta^{(1,1)} = \frac{1}{2}\eta^2,\ \zeta^{(1,0)} = \zeta^{(0,1)} = \frac{1}{2}\eta,\ \zeta^{(1,1,1)} = \frac{1}{6}\eta^3,\\
&\zeta^{(1,1,0)} = \zeta^{(0,1,1)} = \frac{1}{4},\ \zeta^{(0,0)} = \frac{1}{2},\ \zeta^{(1,1,1,1)} = \frac{1}{8} \text{ et } \zeta^\alpha = 0 \text{ sinon.}
\end{aligned}
$$

Exercice 1.5.4. Montrer que la famille précédente préserve bien les moments jusqu'à l'ordre 5.

En écrivant le développement (1.21) pour $f(x) = I(x)$ où $I(x) = x$ est la fonction identité sur $\mathbb{R}^n$ et en remplaçant les intégrales browniennes itérées par les variables correspondantes de la famille qui préserve les moments jusqu'à l'ordre m on approche la loi de X_t par celle de

$$Y_t^y = y + \sum_{1 \leq \|\alpha\| \leq m} t^{\|\alpha\|/2} V_{j_1} \ldots V_{j_k} I(y) \zeta^\alpha.$$

Pour $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on note $Q_t g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $Q_t g(x) = \mathbb{E}(g(Y_t^x))$ où Y_t^x s'obtient en remplaçant y par x dans le second membre de l'équation précédente.
On peut approcher $\mathbb{E}(f(X_t))$ par $\mathbb{E}(f(Y_t^y))$. Le résultat suivant assure qu'en itérant N fois cette approximation, on obtient un schéma dont l'ordre de convergence faible est $(m-1)/2$.

Théorème 1.5.5. *Lorsque les fonctions f, b et σ sont suffisamment régulières,*

$$\left| \mathbb{E}(f(X_T)) - Q^N_{\frac{T}{N}} f(y) \right| \leq \frac{C}{N^{(m-1)/2}}$$

où la constante C dépend de m, f, b et σ mais pas de N.

Remarque 1.5.6.
- En posant $\zeta^j = W_1^j$ pour $0 \leq j \leq d$, $\zeta^{(j,j)} = \frac{1}{2}$ pour $1 \leq j \leq d$, $\zeta^{(j,l)} = 0$ pour $0 \leq j \neq l \leq d$ et $\zeta^{(j,k,l)} = 0$ pour $1 \leq j,k,l \leq d$, on obtient une famille qui préserve les moments jusqu'à l'ordre $m = 3$. Par la propriété de Markov, cette famille est telle que $Q^N_{\frac{T}{N}} f(y) = \mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N))$. On retrouve ainsi que l'ordre de convergence faible du schéma d'Euler est $1 = (3-1)/2$.

- Bien entendu, pour approcher numériquement $\mathbb{E}(f(X_T))$, il est préférable d'utiliser une famille qui préserve les moments jusqu'à l'ordre m définie sur un espace de probabilité fini de cardinal aussi petit que possible. La famille qui préserve les moments jusqu'à l'ordre 5 de l'exemple 1.5.3 peut être générée sur un espace de probabilité de cardinal 3. Pour ce choix, le calcul exact de $Q^N_{\frac{T}{N}} f(y)$ est possible en utilisant un arbre non-recombinant avec 3^N feuilles. Le cardinal de l'espace de probabilité nécessaire pour générer une famille qui préserve les moments jusqu'à l'ordre m augmente bien sûr avec m et avec la dimension d du mouvement brownien. Si le calcul exact de $Q^N_{\frac{T}{N}} f(y)$ n'est plus possible, on doit recourir à une technique d'échantillonnage partiel comme la méthode de Monte-Carlo (voir [39]).

Proof. Pour $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on note $P_t g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $P_t g(x) = \mathbb{E}(g(X_t^x))$ où X^x est la solution de l'EDS

$$dX_t^x = \sigma(X_t^x) dW_t + b(X_t^x) dt, \ X_0^x = x.$$

On suppose désormais que g est une fonction régulière. En remplaçant y par x dans (1.21), on obtient que la différence $P_t g(x) - Q_t g(x)$ vaut

$$\mathbb{E}\left[g\left(x + \sum_{1 \leq \|\alpha\| \leq m} V_{j_1} \ldots V_{j_k} I(x) W_t^\alpha + R_{m,I}^{W,x}(t) \right) - g\left(x + \sum_{1 \leq \|\alpha\| \leq m} t^{\|\alpha\|/2} V_{j_1} \ldots V_{j_k} I(x) \zeta^\alpha \right) \right].$$

En supposant pour simplifier que $n=1$ et en effectuant un développement de Taylor standard à l'ordre m, on obtient

$$P_t g(x) - Q_t g(x) = \sum_{l=1}^{m} \frac{g^{(l)}(x)}{l!} \mathbb{E}\Bigg[\Bigg(\sum_{1\leq \|\alpha\| \leq m} V_{j_1}\dots V_{j_k} I(x) W_t^\alpha + R^W_{m,I}(t)\Bigg)^l - \Bigg(\sum_{1\leq \|\alpha\| \leq m} t^{\|\alpha\|/2} V_{j_1}\dots V_{j_k} I(x)\zeta^\alpha\Bigg)^l\Bigg] + \mathcal{O}(t^{\frac{m+1}{2}})$$

Le fait que le reste est un $\mathcal{O}(t^{\frac{m+1}{2}})$ se déduit de $\mathbb{E}(|X_t^x - x|^{m+1}) \leq Ct^{\frac{m+1}{2}}$ (voir Proposition 1.1.6) et de

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{1\leq \|\alpha\| \leq m} t^{\frac{\|\alpha\|}{2}} V_{j_1}\dots V_{j_k} I(x)\zeta^\alpha\right|^{m+1}\right) = t^{\frac{m+1}{2}}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{1\leq \|\alpha\| \leq m} t^{\frac{\|\alpha\|-1}{2}} V_{j_1}\dots V_{j_k} I(x)\zeta^\alpha\right|^{m+1}\right).$$

D'après la proposition 1.5.1, $R^{W,x}_{m,I}(t)$ se comporte en $\mathcal{O}(t^{\frac{m+1}{2}})$. En développant les puissances l-ièmes à l'intérieur de l'espérance et en utilisant (1.22), on obtient pour $j \leq m$, que tous les termes en $\mathcal{O}(t^{j/2})$ disparaissent. On conclut que lorsque g est suffisamment régulière,

$$\exists C > 0, \forall t > 0,\ \|P_t g - Q_t g\|_\infty \leq Ct^{(m+1)/2}.$$

Lorsque f est régulière, les fonctions $P_{t_{N-k}} f$, $k \in \{1,\dots,N\}$ le sont aussi. On en déduit

$$\exists C > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1,\dots,N\},\ \|P_{\frac{T}{N}} P_{t_{N-k}} f - Q_{\frac{T}{N}} P_{t_{N-k}} f\|_\infty \leq C\left(\frac{T}{N}\right)^{(m+1)/2}.$$

Comme pour $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bornée, pour tout $t \geq 0$, $\|Q_t h\|_\infty \leq \|h\|_\infty$, cela implique

$$\exists C > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1,\dots,N\},\ \|Q^{k-1}_{\frac{T}{N}}(P_{\frac{T}{N}} P_{t_{N-k}} f - Q_{\frac{T}{N}} P_{t_{N-k}} f)\|_\infty \leq C\left(\frac{T}{N}\right)^{(m+1)/2}.$$

On conclut en reportant cette estimation dans la décomposition suivante de l'erreur

$$\mathbb{E}(f(X_T)) - Q^N_{\frac{T}{N}} f(y) = P_T f(y) - Q^N_{\frac{T}{N}} f(y) = \sum_{k=1}^{N} Q^{k-1}_{\frac{T}{N}}\left(P_{\frac{T}{N}} P_{t_{N-k}} f - Q_{\frac{T}{N}} P_{t_{N-k}} f\right)(y).$$

□

Pour terminer, nous allons présenter rapidement l'approximation de $\mathbb{E}(f(X_T))$ qui repose sur la notion de cubature proposée par Lyons et Victoir [33] et que l'on peut relier aux familles qui préservent les moments jusqu'à l'ordre m.

Définition 1.5.7. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$. Des trajectoires continues $\omega_{t,1},\dots,\omega_{t,L}$ à variation bornée de $[0,t]$ dans $\mathbb{R}^d$ et des poids positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_L$ de somme 1 fournissent une formule de cubature de degré m au temps t si*

$$\forall \alpha = (j_1,\dots,j_k) \in \mathcal{A}\ t.q.\ \|\alpha\| \leq m,\ \mathbb{E}(W_t^\alpha) = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l \omega^\alpha_{t,l} \tag{1.23}$$

où $\omega^\alpha_{t,l} = \int_{0\leq s_1 \leq \dots \leq s_k \leq t} d\omega^{j_1}_{t,l}(s_1)\dots d\omega^{j_k}_{t,l}(s_k)$ avec $\omega^j_{t,l}(s)$ désignant la j-ième coordonnée de $\omega_{t,l}(s)$ lorsque $1 \leq j \leq d$ et $\omega^0_{t,l}(s) = s$.

D'après [33], il existe une formule de cubature de degré m au temps 1 t.q. L est plus petit que $\mathrm{Card}\{\alpha \in \mathcal{A} : \|\alpha\| \leq m\}$. En outre, on en déduit facilement une formule de cubature de degré m au temps t en posant $\omega_{t,l}(s) = (t\omega^0_{1,l}(s/t), \sqrt{t}\omega^1_{1,l}(s/t), \ldots, \sqrt{t}\omega^d_{1,l}(s/t))$.

Pour $l \in \{1, \ldots, L\}$ soit $(\xi_{t,l}(s,y))_{s\leq t}$ la solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\xi_{t,l}(0,y) = y \text{ et } \forall s \in [0,t],\ d\xi_{t,l}(s,y) = \sum_{j=0}^{d} \sigma_j(\xi_{t,l}(s,y))d\omega^j_{t,l}(s).$$

Lyons et Victoir proposent d'approcher $\mathbb{E}(g(X^x_t))$ par $Q_tg(x) = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l g(\xi_{t,l}(t,x))$. Le théorème 1.5.5 reste vrai pour cette nouvelle définition de Q_tg. La preuve repose sur une décomposition analogue de l'erreur mais le contrôle de $P_tg(x) - Q_tg(x)$ est plus facile. En effet, le développement de Taylor (1.21) reste valable lorsque l'on remplace (X, W) par $(\xi_{t,l}, w_{t,l})$:

$$g(\xi_{t,l}(s,x)) = g(x) + \sum_{\alpha:\|\alpha\|\leq m} V_{j_1}\ldots V_{j_k}g(x)\omega^\alpha_{t,l} + R^{\omega_{t,l},x}_{m,g}(t).$$

En multipliant cette égalité par λ_l, en sommant sur l, et en soustrayant l'espérance du développement (1.21) pour la fonction g, on obtient

$$Q_tg(x)-P_tg(x) = \sum_{\alpha:\|\alpha\|\leq m} V_{j_1}\ldots V_{j_k}g(x)\left(\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\omega^\alpha_{t,l} - \mathbb{E}(W^\alpha_t)\right)+\sum_{l=1}^{L}\lambda_l R^{\omega_{t,l},x}_{m,g}(t)-\mathbb{E}(R^{W,x}_{m,g}(t)).$$

La première somme est nulle d'après (1.23). Les termes de restes sont en $\mathcal{O}(t^{(m+1)/2})$ d'après la proposition 1.5.1 et le scaling qui permet d'obtenir la formule de cubature au temps t à partir de la formule de cubature au temps 1.

1.6 Pont brownien pour les options barrière ou lookback

En dimension $n = d = 1$, on condidère l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt,\ X_0 = x_0.$$

On suppose que les coefficients σ et b satisfont (Lip) et que σ ne s'annule pas. Alors σ est de signe constant et quitte à remplacer W_t par $-W_t$ on suppose que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma(x) > 0}$. On souhaite calculer $\mathbb{E}\left(\varphi(X_T, M_T)\right)$ où pour $t \geq 0$, M_t désigne soit $\max_{s\in[0,t]} X_s$ soit $\min_{s\in[0,t]} X_s$. Pour fixer les idées, nous supposerons désormais que $M_t = \max_{s\in[0,t]} X_s$ mais le cas du minimum se traite par symétrie.

Exemple. Lorsque $(X_t)_t$ modélise le cours d'un actif financier,

- le choix $\varphi(x,y) = y - x$ correspond à une option lookback,
- le choix $\varphi(x,y) = f(x)1_{\{y<L\}}$ correspond à une option barrière up and out.

Une approche possible consiste à discrétiser l'EDS suivant le schéma d'Euler

$$\begin{cases}\bar{X}_0 = y \text{ et pour } k \in \{0,\ldots,N-1\},\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}],\\ \bar{X}_t = \bar{X}_{t_k} + \sigma(\bar{X}_{t_k})(W_t - W_{t_k}) + b(\bar{X}_{t_k})(t - t_k)\end{cases}$$

et à poser $\bar{M}_T = \max_{0\leq k\leq N} \bar{X}_{t_k}$. Alors on peut approcher $\mathbb{E}\left(\varphi(X_T, M_T)\right)$ par $\mathbb{E}\left(\varphi(\bar{X}_T, \bar{M}_T)\right)$ (la vitesse de convergence forte de $\bar{M}_T$ vers M_T fait l'objet du problème du paragraphe 1.8.2). Malheureusement le maximum discrétisé converge lentement vers sa limite, ce qui conduit à un biais important. Pour remédier à cette difficulté, nous allons voir qu'il est possible de simuler le couple $(\bar{X}_T, \max_{t\in[0,T]} \bar{X}_t)$ où le maximum est maintenant pris sur l'ensemble de la trajectoire du schéma d'Euler en temps continu et non plus seulement sur les valeurs de ce schéma aux instants de discrétisation. Cela améliore grandement la performance.

Le résultat suivant montre que l'on peut en fait se ramener à la simulation du couple $(W_{t_1}, \max_{t\in[0,t_1]} W_t)$. Puis nous verrons comment simuler ce couple.

Proposition 1.6.1. *Conditionnellement à* $(\bar{X}_0, \bar{X}_{t_1}, \dots, \bar{X}_T) = (x_0, x_1, \dots, x_N)$, *les variables aléatoires* $\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t,\ k \in \{0, \dots, N-1\}$ *sont indépendantes et ont respectivement même loi que* $x_k + \sigma(x_k)\max_{t\in[0,t_1]} W_t$ *conditionnellement à* $W_{t_1} = \frac{x_{k+1}-x_k}{\sigma(x_k)}$.

Remarque 1.6.2. On constate que le coefficient de dérive b n'intervient pas dans la loi conditionnelle de $\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t$ sachant $(\bar{X}_{t_k}, \bar{X}_{t_{k+1}}) = (x_k, x_{k+1})$.

Démonstration : L'indépendance conditionnelle découle de l'indépendance des accroissements browniens.

Intéressons nous à la loi conditionnelle de $\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t$ sachant $(\bar{X}_{t_k}, \bar{X}_{t_{k+1}}) = (x_k, x_{k+1})$. On a

$$\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t = \bar{X}_{t_k} + \sigma(\bar{X}_{t_k}) \max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \left(W_t - W_{t_k} + \frac{b}{\sigma}(\bar{X}_{t_k})(t-t_k)\right)$$
$$W_{t_{k+1}} - W_{t_k} + \frac{b}{\sigma}(\bar{X}_{t_k})(t_{k+1}-t_k) = \frac{\bar{X}_{t_{k+1}} - \bar{X}_{t_k}}{\sigma(\bar{X}_{t_k})}.$$

Il suffit donc de montrer que pour $\alpha = \frac{b}{\sigma}(x_k)$, la loi conditionnelle de $\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]}(W_t - W_{t_k} + \alpha(t-t_k))$ sachant $W_{t_{k+1}} - W_{t_k} + \alpha(t_{k+1}-t_k) = \frac{x_{k+1}-x_k}{\sigma(x_k)}$ est égale à la loi conditionnelle de $\max_{t\in[0,t_1]} W_t$ sachant $W_{t_1} = \frac{x_{k+1}-x_k}{\sigma(x_k)}$.
La stationnarité des accroissements browniens implique que pour $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bornée,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[g\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k} + \alpha(t_{k+1}-t_k), \max_{t\in[t_k,t_{k+1}]}(W_t - W_{t_k} + \alpha(t-t_k))\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[g\left(W_{t_1} + \alpha t_1, \max_{t\in[0,t_1]}(W_t + \alpha t)\right)\right].
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Girsanov, sous $\mathbb{Q}$ de densité $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{-\alpha W_{t_1} - \frac{\alpha^2}{2}t_1}$ par rapport à $\mathbb{P}$, $(B_t = W_t + \alpha t)_{t\leq t_1}$ est un mouvement brownien, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g\left(W_{t_1} + \alpha t_1, \max_{t\in[0,t_1]}(W_t + \alpha t)\right)\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[g\left(W_{t_1} + \alpha t_1, \max_{t\in[0,t_1]}(W_t + \alpha t)\right)\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[g\left(B_{t_1}, \max_{t\in[0,t_1]} B_t\right) e^{\alpha W_{t_1} + \frac{\alpha^2}{2}t_1}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[g\left(B_{t_1}, \max_{t\in[0,t_1]} B_t\right) e^{\alpha B_{t_1} - \frac{\alpha^2}{2}t_1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[g\left(W_{t_1}, \max_{t\in[0,t_1]} W_t\right) e^{\alpha W_{t_1} - \frac{\alpha^2}{2}t_1}\right].
\end{aligned}$$

Donc si on note $p(x,y)$ la densité du couple $(W_{t_1}, \max_{t\in[0,t_1]} W_t)$ dont l'existence est assurée par le lemme 1.6.3 ci-dessous, on a pour toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bornée,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[g\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k} + \alpha(t_{k+1}-t_k), \max_{t\in[t_k,t_{k+1}]}(W_t - W_{t_k} + \alpha(t-t_k))\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[g\left(W_{t_1}, \max_{t\in[0,t_1]} W_t\right) e^{\alpha W_{t_1} - \frac{\alpha^2}{2}t_1}\right] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)p(x,y)e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t_1}dxdy.
\end{aligned}$$

On en déduit que le couple $\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k} + \alpha(t_{k+1}-t_k), \max_{t\in[t_k,t_{k+1}]}(W_t - W_{t_k} + \alpha(t-t_k))\right)$ admet pour densité $p(x,y)e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t_1}$. Donc la densité conditionnelle de $\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]}(W_t - W_{t_k} + \alpha(t-t_k))$ sachant $W_{t_{k+1}} - W_{t_k} + \alpha(t_{k+1}-t_k) = x$ est égale à

$$\frac{p(x,y)e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t_1}}{\int_{\mathbb{R}} p(x,z)e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t_1}dz} = \frac{p(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} p(x,z)dz}$$

c'est-à-dire à la densité conditionnelle de $\max_{t\in[0,t_1]} W_t$ sachant $W_{t_1} = x$. □

Lemme 1.6.3. *Soit $(W_t)_t$ un mouvement brownien réel. Le couple $(W_{t_1}, \max_{t\in[0,t_1]} W_t)$ possède la densité $p(z,w) = 1_{\{w>z^+\}}\frac{2(2w-z)}{t_1\sqrt{2\pi t_1}}e^{-\frac{(2w-z)^2}{2t_1}}$. En outre,*

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \geq y \middle| W_{t_1} = x\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \leq \max(0,x) \\ e^{-\frac{2y(y-x)}{t_1}} \text{ sinon} \end{cases}. \tag{1.24}$$

En particulier, conditionnellement à $W_{t_1} = x$, $\max_{t\in[0,t_1]} W_t$ a même loi que $\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 2t_1\ln(U)}\right)$ où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Démonstration : L'égalité (1.24) est claire si $y \leq \max(0,x)$. Lorsque $y > \max(0,x)$, on va utiliser le principe de réflexion pour le mouvement brownien. D'après la propriété de Markov forte, si $\tau_y = \inf\{t \geq 0 : W_t = y\}$, le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$B_t = \begin{cases} W_t \text{ si } t \leq \tau_y \\ W_{\tau_y} - (W_t - W_{\tau_y}) = 2y - W_t \text{ si } t \geq \tau_y \end{cases},$$

est un mouvement brownien. Donc lorsque $y \geq \max(x,0)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \geq y, W_{t_1} \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} B_t \geq y, B_{t_1} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\tau_y \leq t_1, 2y - W_{t_1} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \geq y, W_{t_1} \geq 2y - x\right) = \mathbb{P}\left(W_{t_1} \geq 2y - x\right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé la définition de $(B_t)_{t\geq 0}$ pour la deuxième égalité et l'inégalité $2y - x \geq y$ pour la dernière. Si $x > y \geq 0$, alors en utilisant le résultat précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \geq y, W_{t_1} \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \geq y, W_{t_1} \leq y\right) + \mathbb{P}\left(y < W_{t_1} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(W_{t_1} \geq y\right) + \mathbb{P}\left(y < W_{t_1} \leq x\right).
\end{aligned}$$

Enfin si $y < 0$, $\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \geq y, W_{t_1} \leq x\right) = \mathbb{P}(W_{t_1} \leq x)$. Comme W_{t_1} possède la densité $e^{-\frac{z^2}{2t_1}}/\sqrt{2\pi t_1}$, on vérifie alors facilement que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \geq y, W_{t_1} \leq x\right) = \int_{z=-\infty}^{x} \int_{w=y}^{+\infty} p(z,w)dwdz \tag{1.25}$$

pour $p(z,w) = 1_{\{w>z^+\}} \frac{2(2w-z)}{t_1\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{(2w-z)^2}{2t_1}}$. En effet

$$\int_y^{+\infty} p(z,w)dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{(2(y\vee z^+)-z)^2}{2t_1}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{(2y-z)^2}{2t_1}} & \text{si } y \geq z^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{z^2}{2t_1}} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi lorsque $y < 0$, $\int_{z=-\infty}^{x} \int_{w=y}^{+\infty} p(z,w)dwdz = \mathbb{P}(W_{t_1} \leq x)$. Lorsque $y \geq x^+$,

$$\int_{z=-\infty}^{x} \int_{w=y}^{+\infty} p(z,w)dwdz = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(2y-z)^2}{2t_1}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi t_1}} = \int_{2y-x}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2t_1}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi t_1}} = \mathbb{P}(W_{t_1} \geq 2y - x).$$

Enfin, lorsque $0 \leq y < x$,

$$\begin{aligned}\int_{z=-\infty}^{x} \int_{w=y}^{+\infty} p(z,w)dwdz &= \int_{z=-\infty}^{y} \int_{w=y}^{+\infty} p(z,w)dwdz + \int_y^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{z^2}{2t_1}} dz \\ &= \mathbb{P}(W_{t_1} \geq 2y - y) + \mathbb{P}(y < W_{t_1} \leq x).\end{aligned}$$

On déduit de (1.25) que le couple $(W_{t_1}, \max_{t\in[0,t_1]} W_t)$ possède la densité $p(z,w)$.

Donc pour $y > \max(x,0)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \geq y \middle| W_{t_1} = x\right) &= \frac{\int_y^{+\infty} p(x,w)dw}{e^{-\frac{x^2}{2t_1}}/\sqrt{2\pi t_1}} = \frac{\partial_x \mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \geq y, W_{t_1} \leq x\right)}{e^{-\frac{x^2}{2t_1}}/\sqrt{2\pi t_1}} \\ &= \frac{\partial_x \mathbb{P}\left(W_{t_1} \geq 2y - x\right)}{e^{-\frac{x^2}{2t_1}}/\sqrt{2\pi t_1}} = e^{-\frac{(2y-x)^2 - x^2}{2t_1}} = e^{-\frac{2y(y-x)}{t_1}}.\end{aligned}$$

La dernière assertion du lemme repose sur la méthode d'inversion de la fonction de répartition. Soit $u \in]0,1[$. On cherche $y > \max(x,0)$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \leq y \middle| W_{t_1} = x\right) = u.$$

En utilisant (1.24), cette égalité se récrit

$$1 - e^{-\frac{2y(y-x)}{t_1}} = u \Leftrightarrow \ln(1-u) = -\frac{2y(y-x)}{t_1} \Leftrightarrow y^2 - xy + \frac{t_1}{2}\ln(1-u) = 0.$$

Le discriminant de l'équation du second degré est $\Delta = x^2 - 2t_1 \ln(1-u)$ et la seule racine supérieure à $\max(x,0)$ est $y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 2t_1\ln(1-u)}\right)$.
D'après la méthode d'inversion de la fonction de répartition, si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, $\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 2t_1\ln(1-U)}\right)$ suit la loi conditionnelle de $\max_{t\in[0,t_1]} W_t$ sachant $W_{t_1} = x$. On conclut en remarquant que $1-U$ a même loi que U. $\square$

Exercice 1.6.4. Vérifier que conditionnellement à $W_{t_1} = x$, $\min_{t\in[0,t_1]} W_t$ a même loi que $\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 2t_1\ln(U)}\right)$ où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$ (*On pourra appliquer le lemme 1.6.3 au mouvement brownien* $(-W_t)_{t\geq 0}$).

1.6.1 Application aux options barrière

On va approcher $\mathbb{E}\left(f(X_T)1_{\{\max_{t\in[0,T]} X_t<L\}}\right)$ par $\mathbb{E}\left(f(\bar{X}_T)1_{\{\max_{t\in[0,T]} \bar{X}_t<L\}}\right)$. Nous allons voir que l'on peut calculer l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire dans la seconde espérance sachant les valeurs $(\bar{X}_0, \bar{X}_{t_1}, \dots, \bar{X}_T)$ du schéma d'Euler aux instants de discrétisation. Cela permet d'évaluer cette espérance par la méthode de Monte Carlo en simulant le schéma d'Euler. Comme $1_{\{\max_{t\in[0,T]} \bar{X}_t<L\}} = \prod_{k=0}^{N-1} 1_{\{\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t<L\}}$, d'après la proposition 1.6.1, on a

$$\mathbb{E}\left(f(\bar{X}_T)1_{\{\max_{t\in[0,T]} \bar{X}_t<L\}}\middle|\bar{X}_0, \bar{X}_{t_1}, \dots, \bar{X}_T\right) = f(\bar{X}_T)\prod_{k=0}^{N-1}\left(1-\psi(\bar{X}_{t_k}, \bar{X}_{t_{k+1}})\right)$$

où

$$\begin{aligned}\psi(x_k, x_{k+1}) &= \mathbb{P}\left(\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t \geq L\middle|(\bar{X}_{t_k}, \bar{X}_{t_{k+1}}) = (x_k, x_{k+1})\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,t_1]} W_t \geq \frac{L-x_k}{\sigma(x_k)}\middle|W_{t_1} = \frac{x_{k+1}-x_k}{\sigma(x_k)}\right).\end{aligned}$$

D'après (1.24),

$$\psi(x_k, x_{k+1}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \frac{L-x_k}{\sigma(x_k)} \leq \max\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{\sigma(x_k)}, 0\right) & \text{i.e. si } L \leq \max(x_k, x_{k+1}) \\ e^{-\frac{2(L-x_k)(L-x_{k+1})}{\sigma^2(x_k)t_1}} & \text{sinon .}\end{cases}$$

On conclut finalement que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(f(\bar{X}_T)1_{\{\max_{t\in[0,T]} \bar{X}_t<L\}}\middle|\bar{X}_0, \bar{X}_{t_1}, \dots, \bar{X}_T\right)\\ &= f(\bar{X}_T)1_{\{\max_{0\leq k\leq N} \bar{X}_{t_k}<L\}}\prod_{k=0}^{N-1}\left[1-\exp\left(-\frac{2(L-\bar{X}_{t_k})(L-\bar{X}_{t_{k+1}})}{t_1\sigma^2(\bar{X}_{t_k})}\right)\right].\end{aligned} \tag{1.26}$$

Pour approcher $\mathbb{E}\left(f(X_T)1_{\{\max_{t\in[0,T]} X_t<L\}}\right)$, on évalue l'espérance du terme de droite par la méthode de Monte Carlo. Il suffit pour cela de générer le schéma d'Euler aux instants de discrétisation. Par rapport à l'approche naïve évoquée au début du paragraphe qui consiste à calculer $\mathbb{E}\left(f(\bar{X}_T)1_{\{\max_{0\leq k\leq N} \bar{X}_{t_k}<L\}}\right)$ par la méthode de Monte Carlo, nous voyons que nous avons introduit un facteur multiplicatif plus petit que 1 dans l'espérance pour tenir compte du fait que le schéma d'Euler en temps continu peut dépasser la barrière alors qu'il est en dessous de cette barrière à tous les instants de discrétisation. Cela améliore nettement le biais.

Exercice 1.6.5. Déterminer $\mathbb{E}\left(1_{\{\min_{t\in[0,T]} \bar{X}_t>L\}}\middle|\bar{X}_0, \bar{X}_{t_1}, \dots, \bar{X}_T\right)$.

1.6.2 Application aux options lookback

Si on se donne $(U_k)_{0\leq k\leq N-1}$ des variables indépendantes uniformes sur $[0,1]$ et indépendantes du brownien W, alors la proposition 1.6.1 et le lemme 1.6.3, assurent que conditionnellement à $(\bar{X}_0, \bar{X}_{t_1}, \dots, \bar{X}_T) = (x_0, \dots, x_N)$, le vecteur $(\max_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t)_{0\leq k\leq N-1}$ a même loi que le vecteur

$$\left(x_k + \frac{\sigma(x_k)}{2}\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{\sigma(x_k)} + \sqrt{\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{\sigma^2(x_k)} - 2t_1\ln(U_k)}\right)\right)_{0\leq k\leq N-1}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\left(x_k + x_{k+1} + \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 - 2\sigma^2(x_k)t_1\ln(U_k)}\right)\right)_{0\leq k\leq N-1}.$$

En particulier, cela implique que le vecteur $(\bar{X}_0, \bar{X}_{t_1}, \dots, \bar{X}_T, \max_{t\in[0,T]} \bar{X}_t)$ a même loi que le vecteur

$$\left(\bar{X}_0, \bar{X}_{t_1}, \dots, \bar{X}_T, \frac{1}{2}\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\bar{X}_{t_k} + \bar{X}_{t_{k+1}} + \sqrt{(\bar{X}_{t_{k+1}} - \bar{X}_{t_k})^2 - 2\sigma^2(\bar{X}_{t_k})t_1\ln(U_k)}\right)\right).$$

Ainsi on sait simuler suivant la loi de $(\bar{X}_T, \max_{t\in[0,T]} \bar{X}_t)$. Cela permet d'évaluer $\mathbb{E}\left(\varphi(\bar{X}_T, \max_{t\in[0,T]} \bar{X}_t)\right)$ par la méthode de Monte-Carlo pour approcher $\mathbb{E}\left(\varphi(X_T, \max_{t\in[0,T]} X_t)\right)$

Remarque 1.6.6. Dans le cas des options barrières, on pourrait utiliser cette approche avec $\varphi(x,y) = f(x)1_{\{y<L\}}$. Mais l'égalité en loi qui précède et (1.26) assurent que

$$\mathbb{E}\left(f(\bar{X}_T)1_{\{\frac{1}{2}\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\bar{X}_{t_k}+\bar{X}_{t_{k+1}}+\sqrt{(\bar{X}_{t_{k+1}}-\bar{X}_{t_k})^2-2\sigma^2(\bar{X}_{t_k})t_1\ln(U_k)}\right)<L\}}\middle|\bar{X}_0, \bar{X}_{t_1}, \dots, \bar{X}_T\right)$$
$$= f(\bar{X}_T)1_{\{\max_{0\leq k\leq N}\bar{X}_{t_k}<L\}}\prod_{k=0}^{N-1}\left[1-\exp\left(-\frac{2(L-\bar{X}_{t_k})(L-\bar{X}_{t_{k+1}})}{t_1\sigma^2(\bar{X}_{t_k})}\right)\right].$$

Donc l'approche proposée au paragraphe précédent qui consiste à évaluer l'espérance de la variable aléatoire au second membre par la méthode de Monte Carlo est préférable puisqu'elle est plus précise (réduction de variance par conditionnement) et nécessite moins de calculs (pas besoin de générer les U_k).

1.6.3 Le cas des options barrière sur plusieurs sous-jacents

On suppose que les n sous-jacents évoluent suivant l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt$$

avec $(W_t)_t$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ et que l'on souhaite évaluer

$C = \mathbb{E}\left(f(X_T)1_{\{\forall t\in[0,T], X_t\in D\}}\right)$ où $D = \{x\in\mathbb{R}^n : e.(x-z) < 0\}$ pour $e, z\in\mathbb{R}^n$ t.q. $e\neq 0$.

On va approcher cette quantité à l'aide du schéma d'Euler en temps continu $(\bar{X}_t)_{t\in[0,T]}$ en calculant

$$C_N = \mathbb{E}\left(f(\bar{X}_T)1_{\{\forall t\in[0,T], \bar{X}_t\in D\}}\right).$$

En généralisant l'approche développée en dimension 1, on peut montrer que

$$C_N = \mathbb{E}\left(f(\bar{X}_T)\prod_{k=0}^{N-1}\left(1-\psi(\bar{X}_{t_k}, \bar{X}_{t_{k+1}})\right)\right)$$

où

$$\begin{aligned}\psi(x_k, x_{k+1}) &= \mathbb{P}\left(\exists t \in [t_k, t_{k+1}] : \bar{X}_t \notin D \middle| (\bar{X}_{t_k}, \bar{X}_{t_{k+1}}) = (x_k, x_{k+1})\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\exists t \in [t_k, t_{k+1}] : e.\bar{X}_t \geq e.z \middle| (\bar{X}_{t_k}, \bar{X}_{t_{k+1}}) = (x_k, x_{k+1})\right).\end{aligned}$$

Pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$, conditionnellement à $\bar{X}_{t_k} = x_k$, on a

$$e.\bar{X}_t = e.x_k + (\sigma^*(x_k)e).(W_t - W_{t_k}) + (t - t_k)b(x_k).e$$

On distingue alors deux cas :

- Lorsque le vecteur $\sigma^*(x_k)e \in \mathbb{R}^d$ est nul, $t \in [t_k, t_{k+1}] \to e.\bar{X}_t$ est une fonction affine ce qui entraîne que $\psi(x_k, x_{k+1}) = 1_{\{x_k \notin D \text{ ou } x_{k+1} \notin D\}}$.

- Sinon, on remarque que $\frac{\sigma^*(x_k)e}{|\sigma^*(x_k)e|}.(W_t - W_{t_k})$ est un mouvement brownien unidimensionnel. Comme dans la proposition 1.6.1, on en déduit que conditionnellement à $(\bar{X}_{t_k}, \bar{X}_{t_{k+1}}) = (x_k, x_{k+1})$, $\max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} e.\bar{X}_t$ a même loi que $e.x_k + |\sigma^*(x_k)e| \max_{t \in [0,t_1]} B_t$ sachant $B_{t_1} = \frac{e.(x_{k+1} - x_k)}{|\sigma^*(x_k)e|}$ avec $(B_t)_t$ un mouvement brownien réel. Donc

$$\psi(x_k, x_{k+1}) = \mathbb{P}\left(\max_{t \in [0,t_1]} B_t \geq \frac{e.(z - x_k)}{|\sigma^*(x_k)e|} \middle| B_{t_1} = \frac{e.(x_{k+1} - x_k)}{|\sigma^*(x_k)e|}\right).$$

En utilisant (1.24), on conclut que

$$\psi(x_k, x_{k+1}) = \begin{cases} 1 \text{ si } e.x_k \geq e.z \text{ ou } e.x_{k+1} \geq e.z \\ e^{-\frac{2(e.(z - x_k))(e.(z - x_{k+1}))}{t_1 |\sigma^*(x_k)e|^2}} \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On conclut que

$$C_N = \mathbb{E}\left(f(\bar{X}_T) 1_{\{\forall 0 \leq k \leq N,\ \bar{X}_{t_k} \in D\}} \prod_{k=0}^{N-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{2(e.(z - \bar{X}_{t_k}))(e.(z - \bar{X}_{t_{k+1}}))}{t_1 |\sigma^*(\bar{X}_{t_k})e|^2}\right)\right]\right).$$

Cette formule généralise celle obtenue en dimension 1.

Remarque 1.6.7. Lorsque D est un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$ et non un demi-espace comme supposé plus haut, on peut utiliser l'approche précédente sur chaque pas de temps en remplaçant la frontière de D par un hyperplan tangent en un point bien choisi. Plus précisément pour $x_k, x_{k+1} \in D$, on pourra approcher $\mathbb{P}\left(\exists t \in [t_k, t_{k+1}] : \bar{X}_t \notin D \middle| (\bar{X}_{t_k}, \bar{X}_{t_{k+1}}) = (x_k, x_{k+1})\right)$ en remplaçant la frontière ∂D de D par l'hyperplan tangent à cette frontière en la projection de x_k sur ∂D et en utilisant la formule obtenue plus haut.

1.7 Options asiatiques dans le modèle de Black-Scholes

En dimension $n = d = 1$, on condidère l'EDS

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt,\ X_0 = x_0.$$

On s'intéresse à une option asiatique dont le payoff porte sur le couple $(X_T, \frac{1}{T}\int_0^T X_s ds) = (X_T, \frac{1}{T}I_T)$ où $I_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t X_s ds$ vérifie $dI_t = X_t dt$. Appliqué à l'EDS en dimension $n = 2$ satisfaite par le couple (X_t, I_t) le schéma d'Euler s'écrit $(\bar{X}_0, \bar{I}_0) = (x_0, 0)$ et

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\} \begin{cases} \bar{X}_{t_{k+1}} = \bar{X}_{t_k} + \sigma(t_k, \bar{X}_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + b(t_k, \bar{X}_{t_k})(t_{k+1} - t_k) \\ \bar{I}_{t_{k+1}} = \bar{I}_{t_k} + \bar{X}_{t_k}(t_{k+1} - t_k) \end{cases}.$$

Les résultats de convergence forte et faible énoncés précédemment s'appliquent pour contrôler l'erreur commise en approchant $(X_T, \frac{1}{T}\int_0^T X_s ds)$ par $(\bar{X}_T, \frac{1}{T}\bar{I}_T = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}_{t_k})$. En particulier, si les fonctions σ et b satisfont l'hypothèse (Lip), la vitesse d'approximation forte de $\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds$ par $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\bar{X}_{t_k}$ est en $\frac{C}{N^{\min(\frac{1}{2},\alpha)}}$ où α est l'indice de Hölder donnant la régularité en temps des coefficients σ et b du modèle.

Dans le cas du modèle de Black-Scholes

$$dX_t = \sigma X_t dW_t + rX_t dt,\ X_0 = y > 0,$$

il est possible de simuler sans commettre d'erreur de discrétisation le vecteur $(X_0, X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_T) = y \times (1, e^{\sigma W_{t_1} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_1}, e^{\sigma W_{t_2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_2}, \dots, e^{\sigma W_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T})$. Il faut bien sûr tirer parti de cette possibilité comme l'indique le résultat suivant :

Proposition 1.7.1.

$$\forall p \geq 1,\ \exists C_p > 0,\ \forall N \geq 1,\ \mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{t_k}\right|^{2p}\right) \leq \frac{C_p}{N^{2p}}.$$

Remarque 1.7.2. En particulier pour une fonction de payoff φ lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$ comme $\varphi(x, y) = (x - y)^+$ (Put floating Strike) ou $\varphi(x, y) = (y - K)^+$ (Call fixed Strike) on en déduit

$$\left|\mathbb{E}\left(e^{-rT}\varphi\left(X_T, \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt\right)\right) - \mathbb{E}\left(e^{-rT}\varphi\left(X_T, \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{t_k}\right)\right)\right| \leq \frac{C}{N}.$$

Démonstration : Soit $k \in \{0, \dots, N-1\}$. Si on pose $Y_t = X_t - X_{t_k} = \int_{t_k}^t (\sigma X_s dW_s + rX_s ds)$, $Z_t = t_{k+1} - t$, la formule d'intégration par parties

$$Y_{t_{k+1}} Z_{t_{k+1}} - Y_{t_k} Z_{t_k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} Y_t dZ_t + \int_{t_k}^{t_{k+1}} Z_t dY_t + < Y, Z >_{t_{k+1}} - < Y, Z >_{t_k}$$

s'écrit

$$0 - 0 = -\int_{t_k}^{t_{k+1}} (X_t - X_{t_k})dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)(\sigma X_t dW_t + rX_t dt) + 0 - 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{t_k} &= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-t)(\sigma X_t dW_t + rX_t dt)\\ &= \frac{\sigma}{T}\int_0^T (\bar{\tau}_t - t)X_t dW_t + \frac{r}{T}\int_0^T (\bar{\tau}_t - t)X_t dt,\end{aligned}$$

où $\bar{\tau}_t = \left\lceil \frac{tN}{T}\right\rceil \frac{T}{N}$ désigne le premier instant de discrétisation après t (pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier plus grand que x). En procédant comme dans la preuve de la Proposition 1.1.6, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{t_k}\right|^{2p}\right) \leq C\int_0^T (\bar{\tau}_t - t)^{2p}\mathbb{E}(X_t^{2p})dt \leq C\left(\frac{T}{N}\right)^{2p}\int_0^T \mathbb{E}(X_t^{2p})dt.$$

On conclut en remarquant que $\mathbb{E}(X_t^{2p}) = y^{2p}e^{2p(r-\frac{\sigma^2}{2})t}\mathbb{E}(e^{2p\sigma W_t}) = y^{2p}e^{p(2r+(2p-1)\sigma^2)t}$ assure que $\int_0^T \mathbb{E}(X_t^{2p})dt < +\infty$. □

Approcher $m_T = \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt$ par $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{t_k}$ consiste à discrétiser l'intégrale par la méthode des rectangles. D'après les travaux de Lapeyre et Temam [32], il vaut beaucoup mieux discrétiser l'intégrale par la méthode des trapèzes et approcher la moyenne du cours de l'actif par $m_T^N = \frac{1}{N}\left(\frac{X_0+X_T}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} X_{t_j}\right)$. L'erreur forte commise est toujours en $\frac{C}{N}$ mais la constante au numérateur est bien plus petite. En fait, d'après [32],

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((m_T - \mathbb{E}\left(m_T|(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_T)\right))^2\right) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)\\ \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}\left(m_T|(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_T)\right) - m_T^N\right)^2\right) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right),\end{aligned}$$

Comme l'espérance conditionnelle est la projection orthogonale au sens L^2 sur les variables aléatoires mesurables par rapport à la tribu conditionnante, cela montre que m_T^N est très proche de la meilleure approximation (au sens quadratique) $\mathbb{E}\left(m_T|(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_T)\right)$ de m_T ne faisant intervenir que $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_T)$.

Pour aller plus loin, il faut rajouter de l'information dans le schéma. Pour $t \in [t_k, t_{k+1}[$, X_t est proche de sa discrétisation par schéma d'Euler : $X_{t_k}(1 + \sigma(W_t - W_{t_k}) + r(t - t_k))$. Ainsi $\int_{t_k}^{t_{k+1}} X_t dt$ est proche de $X_{t_k}\left(\frac{T}{N} + \sigma\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_t - W_{t_k})dt + \frac{rT^2}{2N^2}\right)$ ce qui conduit à approcher m_T par

$$\hat{m}_T^N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{t_k}\left(1 + \frac{\sigma N}{T}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_t - W_{t_k})dt + \frac{rT}{2N}\right).$$

D'après [32], l'erreur forte de ce schéma est en $\frac{C}{N^{3/2}}$.

Proposition 1.7.3.

$$\forall p \geq 1,\ \exists C_p > 0,\ \forall N \geq 1,\ \mathbb{E}\left(\left|m_T - \hat{m}_T^N\right|^{2p}\right) \leq \frac{C_p}{N^{3p}}.$$

En plus des accroissements $\Delta W_{k+1} = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$, ce schéma fait intervenir les variables $\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_t - W_{t_k})dt$. Si on pose $Y_{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_t - W_{t_k})dt - \frac{T}{2N}\Delta W_{k+1}$ il est facile de simuler le vecteur $(Y_1, \Delta W_1, Y_2, \Delta W_2, \dots, Y_N, \Delta W_N)$ d'après l'exercice qui suit.

Exercice 1.7.4. Montrer que les variables $(Y_{k+1}, \Delta W_{k+1})_{k\in\{0,\dots,N-1\}}$ sont i.i.d. suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}_2\left(0, \begin{pmatrix} \frac{T^3}{12N^3} & 0 \\ 0 & \frac{T}{N} \end{pmatrix}\right)$.

1.8 Problèmes

1.8.1 Vitesse forte du schéma d'Euler dans le cas d'un coefficient de diffusion constant

Soit $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C_b^2 (deux fois continuement dérivable avec des dérivées première et seconde bornées) et sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien réel standard. On s'intéresse à l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} X_0 = x, \\ dX_t = dW_t + b(X_t)dt. \end{cases} \tag{1.27}$$

On se donne $N \in \mathbb{N}^*$ et pour $0 \leq k \leq N$, on pose $t_k = k\Delta t$ où $\Delta t = T/N$. Le schéma d'Euler à N pas de temps associé à (1.27) est défini de façon récurrente par

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = x \\ \forall 0 \leq k \leq N-1,\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}], \bar{X}_t = \bar{X}_{t_k} + (W_t - W_{t_k}) + b(\bar{X}_{t_k})(t - t_k). \end{cases}$$

Les 2 questions peuvent être traitées de façon indépendante.

1. **Cas général :**

   (a) Quel résultat du cours assure que $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left(|X_t - \bar{X}_t|\right) \leq C/N$, où C ne dépend pas de N? On se propose d'améliorer cette majoration en prouvant que

   $$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t - \bar{X}_t|\right) \leq \frac{C}{N}. \tag{1.28}$$

   (b) Pour $s \in [0,T]$, on note $\tau_s = [s/\Delta t] \times \Delta t$ le dernier instant de discrétisation avant s (pour $y \in \mathbb{R}$, $[y]$ désigne la partie entière de y). Vérifier que

   $$\forall t \in [0,T],\ |X_t - \bar{X}_t| \leq \sup|b'| \int_0^t |X_{\tau_s} - \bar{X}_{\tau_s}| ds + \left|\int_0^t b(X_s) - b(X_{\tau_s}) ds\right|.$$

   (c) Vérifier que pour $1 \leq k \leq N$,

   $$\int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X_s) - b(X_{t_{k-1}}) ds = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - r) \left(b(X_r)b'(X_r) + \frac{1}{2}b''(X_r)\right) dr + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - r)\, b'(X_r) dW_r.$$

   (On pourra commencer par calculer $b(X_s) - b(X_{t_{k-1}})$).

   (d) En déduire que

   $$\int_0^t b(X_s) - b(X_{\tau_s}) ds = \int_0^t (\min(t, \tau_r + \Delta t) - r) \left(b(X_r)b'(X_r) + \frac{1}{2}b''(X_r)\right) dr + \int_0^t (\min(t, \tau_r + \Delta t) - r)\ b'(X_r) dW_r,$$

puis que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u\in[0,t]}\left|\int_0^u b(X_s)-b(X_{\tau_s})ds\right|\right)$$
$$\leq \Delta t\left(\int_0^t \mathbb{E}\left|b(X_r)b'(X_r)+\frac{1}{2}b''(X_r)\right|dr+2\sqrt{\int_0^t \mathbb{E}\left((b'(X_r))^2\right)dr}\right).$$

(e) On pose $z(t)=\mathbb{E}\left(\sup_{u\in[0,t]}|X_u-\bar{X}_u|\right)$. Montrer que

$$\forall t\in[0,T],\ z(t)\leq C\left(\Delta t+\int_0^t z(s)ds\right),$$

où la constante C ne dépend pas de N et conclure que l'inégalité (1.28) est satisfaite.

2. **Cas d'un coefficient de dérive linéaire :** $\forall y\in\mathbb{R}$, $b(y)=cy$ où $c\in\mathbb{R}^*$.

(a) Montrer que la solution de l'équation différentielle stochastique (1.27) est donnée par

$$\forall t\in[0,T],\ X_t=xe^{ct}+\int_0^t e^{c(t-s)}dW_s.$$

(b) Que peut-on dire du vecteur $(X_T,W_{t_1}-W_0,W_{t_2}-W_{t_1},\ldots,W_{t_N}-W_{t_{N-1}})$? Pour $1\leq k\leq N$, calculer Cov $(X_T,W_{t_k}-W_{t_{k-1}})$.

(c) On note $\mathcal{F}_N$ la tribu engendrée par $(W_{t_1},W_{t_2},\ldots,W_{t_N})$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_N)=xe^{cT}+\frac{1}{c\Delta t}\sum_{k=1}^N e^{c(N-k)\Delta t}(e^{c\Delta t}-1)(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}).$$

(d) Vérifier que

$$\mathbb{E}\left((X_T-\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_N))^2\right)=\frac{1}{2c}(e^{2cT}-1)\left(1-\frac{2}{c\Delta t}\ \frac{e^{c\Delta t}-1}{e^{c\Delta t}+1}\right).$$

(e) Vérifier que pour $\alpha\to 0$,

$$\frac{e^\alpha-1}{\alpha(e^\alpha+1)}=\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{24}+o(\alpha^2).$$

(f) En déduire l'équivalent pour N tendant vers $+\infty$ de l'erreur quadratique minimale $\mathbb{E}((X_T-\tilde{X}_T)^2)$ commise en générant $\tilde{X}_T$ à l'aide d'un schéma "simple" qui ne fait intervenir que les accroissements $W_{t_k}-W_{t_{k-1}}$, $1\leq k\leq N$. Conclure que l'ordre de convergence du schéma d'Euler est l'ordre optimal parmi les schémas "simples" (la constante multiplicative n'étant pas nécessairement optimale).

(g) Que peut-on dire du vecteur $(X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n})$?
Soit $1\leq k\leq N$. Vérifier que

$$X_{t_k}=e^{c\Delta t}X_{t_{k-1}}+\int_{t_{k-1}}^{t_k}e^{c(t_k-s)}dW_s$$

et en déduire α t.q. la variable $Z_k=X_{t_k}-\alpha X_{t_{k-1}}$ soit indépendante de $X_{t_{k-1}}$.
Vérifier qu'en fait Z_k est indépendante du vecteur $(X_{t_1},\ldots,X_{t_{k-1}})$.
Quelle est la loi de Z_k?

(h) En déduire une méthode permettant de générer un vecteur $(Y_1, \ldots, Y_N)$ qui a même loi que $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_N})$.

1.8.2 Approximation du maximum par le schéma d'Euler

On considère l'équation différentielle stochastique unidimensionnelle

$$dX_t = \sigma(X_t)\ dW_t + b(X_t)\ dt,$$

où b et σ sont des fonctions lipschitziennes. Le processus (W_t) est un mouvement brownien standard unidimensionnel.

On se donne une condition initiale $X_0 = x$ déterministe. Enfin, on se fixe un horizon en temps T et un nombre $N \in \mathbb{N}^*$ de pas de temps. Pour $k \in \{0, \ldots, N\}$ on note $t_k = \frac{kT}{N}$ le k-ème instant de discrétisation et $\bar{X}_{t_k}^N$ la valeur en t_k du schéma d'Euler de pas $\frac{T}{N}$.

Le but de ce problème est de montrer l'estimation suivante (issue de la thèse de P. Seumen Tonou) : pour tout $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left(\left|\max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq N} \bar{X}_{t_k}^N\right|^{2p}\right) \leq C\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)^p. \tag{1.29}$$

Dans l'inégalité précédente et dans tout le reste de l'énoncé on notera C des constantes indépendantes de N qui peuvent varier de ligne en ligne. On pose

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq N} \bar{X}_{t_k}^N, \\
\varepsilon_1 &= \max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq N} X_{t_k}, \\
\varepsilon_2 &= \max_{0\leq k\leq N} X_{t_k} - \max_{0\leq k\leq N} \bar{X}_{t_k}^N.
\end{aligned}$$

1. Montrer

$$\varepsilon_2 \leq \max_{0\leq k\leq N}(X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}^N),$$

puis

$$\varepsilon_2 \geq -\max_{0\leq k\leq N}(\bar{X}_{t_k}^N - X_{t_k}).$$

Appliquer un résultat du cours pour en déduire

$$\mathbb{E}\left(|\varepsilon_2|^{2p}\right) \leq \frac{C}{N^p}.$$

2. Montrer que

$$\varepsilon_1 \leq \max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}(X_t - X_{t_k})\right).$$

En déduire que

$$|\varepsilon_1|^{2p} \leq C \max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^t b(X_s)\ ds\right)^{2p} + C \max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^t \sigma(X_s)\ dW_s\right)^{2p}.$$

3. En utilisant l'inégalité

$$\max_{0\leq k\leq N-1} |x_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |x_k| \tag{1.30}$$

montrer que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^t b(X_s)\ ds\right)^{2p}\right) \leq \frac{C}{N^{2p-1}}.$$

4. (a) Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^t [\sigma(X_s)\ -\sigma(X_{t_k})]dW_s\right)^{2p}\right) \leq \frac{C}{N^{2p-1}}.$$

   (b) Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^t \sigma(X_{t_k})dW_s\right)^{2p}\right)$$
$$\leq C\sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}|W_t-W_{t_k}|\right)^{4p}\right)}.$$

   (c) Vérifier que pour $y \geq 0$, $\mathbb{P}(\max_{0\leq t\leq t_1} W_t \geq y) = 2\mathbb{P}(W_{t_1} \geq y)$. En déduire que $\max_{0\leq k\leq N-1}\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}(W_t - W_{t_k})$ a même loi que $\sqrt{t_1}\max_{0\leq k\leq N-1}|G_k|$ où les variables aléatoires $(G_k)_{0\leq k\leq N-1}$ sont i.i.d. suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}_1(0,1)$.

   (d) Soit q le plus petit entier impair qui majore $4p$. Montrer que pour $x > 0$, $\mathbb{E}(|G_0|^q 1_{\{|G_0|\geq x\}}) = P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $P(.)$ est un polynôme de degré $q-1$. En déduire à l'aide de (1.30) que pour $\alpha > 2$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(|G_k|^{4p}1_{\{|G_k|\geq\sqrt{\alpha\ln(N)}\}}\right)\right) = 0,$$

   puis que pour $N \geq 2$, $\mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}|G_k|^{4p}\right) \leq C(\ln(N))^{2p}$.

   (e) Conclure que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}\int_{t_k}^t \sigma(X_s)\ dW_s\right)^{2p}\right) \leq C\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)^p.$$

5. Vérifier l'estimation (1.29).

6. Comment peut-on améliorer l'approximation de $\max_{0\leq t\leq T} X_t$?

1.8.3 Discrétisation d'une équation différentielle stochastique à coefficients localement lipschitziens

Pour $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on s'intéresse à l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt,\ t \leq T,\ X_0 = y. \tag{1.31}$$

On suppose que les fonctions σ et b sont localement lipschitziennes au sens où pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ il existe une constante $C_m < +\infty$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } |x| \leq m \text{ et } |y| \leq m,\ |\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| \leq C_m|x - y|.$$

On note

$$\sigma_m(x) = \sigma(P_m x) \ \text{ et } \ b_m(x) = b(P_m x) \ \text{ où } \ P_m x = \frac{|x| \wedge m}{|x|}x \tag{1.32}$$

désigne la projection orthogonale de x sur la boule fermée de rayon m centrée à l'origine. On pose également $t_k = k\Delta t$ avec $\Delta t = \frac{T}{N}$ où $N \in \mathbb{N}^*$ est un nombre de pas de temps.

Absence de convergence faible et dans L^p dans un cas particulier

On s'intéresse à l'EDS en dimension $n = d = 1$

$$X_t = W_t - \int_0^t X_s^3 ds. \tag{1.33}$$

On admet pour l'instant qu'elle possède une unique solution $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et que cette solution vérifie $\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^4\right) < +\infty$.
On note $(\bar{X}_t^N)_{t\in[0,T]}$ le schéma d'Euler en temps continu associé et on pose $A_N = \{|W_{t_1}| \geq \frac{3N}{T},\ \sup_{1\leq k\leq N-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \leq 1\}$.

1. Vérifier que $\mathbb{P}(A_N) \geq \mathbb{P}(|W_{t_1}| \geq \frac{3N}{T})\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |W_t| \leq \frac{1}{2})$. En remarquant que pour $x > 0$, $\frac{e^{-x^2/2}}{x} = \int_x^\infty (1 + \frac{1}{y^2})e^{-y^2/2}dy$, vérifier que $\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}dy \geq \frac{xe^{-x^2/2}}{1+x^2}$.
   Conclure que $\mathbb{P}(A_N) \geq \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} |W_t| \leq \frac{1}{2}) \times \frac{6(NT)^{\frac{3}{2}}}{T^3+9N^3} \times \frac{e^{-\frac{9N^3}{2T^3}}}{\sqrt{2\pi}}$.

2. Vérifier que sur l'événement A_N, si pour $k \geq 1$, $|\bar{X}_{t_k}^N| \geq 1$, alors $|\bar{X}_{t_{k+1}}^N| \geq |\bar{X}_{t_k}^N|^2 \left(\frac{T}{N}|\bar{X}_{t_k}^N| - 2\right)$. En déduire que pour $N \geq \frac{T}{3}$, sur l'événement A_N, $\forall k \in \{1, \ldots, N\}$, $|\bar{X}_{t_k}^N| \geq \left(\frac{3N}{T}\right)^{2^{k-1}}$.

3. Conclure que $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(|\bar{X}_T^N|) = +\infty$. En déduire $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(|\bar{X}_T^N - X_T|)$ puis $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |\bar{X}_t^N - X_t|^p)$ pour $p \geq 1$.

4. En remarquant que la loi de $\bar{X}_T^N$ est symétrique, montrer que pour $K > 0$, $\mathbb{E}\left((\bar{X}_T^N - K)^+\right) \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}(|\bar{X}_T^N|) - K$ et en déduire que $\mathbb{E}\left((\bar{X}_T^N - K)^+\right)$ ne converge pas vers $\mathbb{E}\left((X_T - K)^+\right)$ lorsque $N \to \infty$.

Convergence presque sûre du schéma d'Euler

On suppose maintenant qu'il existe une solution à l'EDS (1.31) (voir le paragraphe suivant pour une condition suffisante). On pose $\nu_0 = 0$ et pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\nu_m = \inf\{t \in [0,T] : |X_t| > m\}$ avec la convention $\inf \emptyset = T$.

5. Écrire le schéma d'Euler en temps continu $(\bar{X}^N_t)_{t\in[0,T]}$ associé à (1.31).

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $(x - P_m x, P_m y - P_m x) \leq 0$ (*dans le cas où* $|x| > m$, *on pourra vérifier que* $(x - P_m x, P_m x) = m|x - P_m x|$).
   En déduire que $|P_m y - P_m x|^2 \leq (y - x, P_m y - P_m x)$ et conclure que les fonctions σ_m et b_m sont globalement lipschitziennes de constante de Lipschitz C_m.

7. En déduire l'existence d'une unique solution $(X^m_t)_{t\in[0,T]}$ à l'EDS
   $$dX^m_t = \sigma_m(X^m_t)dW_t + b_m(X^m_t)dt,\ X^m_0 = y. \tag{1.34}$$
   Décrire l'événement $\{\nu_m = T\}$ à l'aide de la variable aléatoire $\sup_{t\in[0,T]} |X_t|$ et vérifier que sur cet événement $(X^m_t)_{t\in[0,T]}$, $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et $(X^{m+1}_t)_{t\in[0,T]}$ coincident. Que vaut $\mathbb{P}(\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*}\{\nu_m = T\})$? Y-a-t-il unicité pour (1.31)?

On note $(\bar{X}^{m,N}_t)_{t\in[0,T]}$ le schéma d'Euler correspondant à (1.34) et $\nu^N_m = \min\{t_k : |\bar{X}^{N,m}_{t_k}| > m\}$.

8. Pour quelles valeurs de γ, la suite $N^\gamma \sup_{t\leq T} |X^m_t - \bar{X}^{m,N}_t|$ converge-t-elle presque sûrement lorsque $N \to \infty$ à m fixé?
   En déduire que si $\nu_m(\omega) = T$, alors il existe $\mathcal{N}(\omega) < +\infty$ tel que pour $N \geq \mathcal{N}(\omega)$, $\nu^N_{m+1}(\omega) = T$ et $\sup_{t\leq T} |X_t(\omega) - \bar{X}^N_t(\omega)| = \sup_{t\leq T} |X^{m+1}_t(\omega) - \bar{X}^{m+1,N}_t(\omega)|$.

9. Conclure que pour tout $\gamma < \frac{1}{2}$, $N^\gamma \sup_{t\leq T} |X_t - \bar{X}^N_t|$ converge p.s. vers 0 lorsque $N \to \infty$.

Existence pour l'EDS (1.31) **lorsque la dérive est rentrante**

On suppose maintenant que σ est **globalement lipschitzienne** et que la fonction de dérive b est localement lipschitzienne et rentrante au sens où il existe $\beta \in [0, +\infty[$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (x, b(x)) \leq \beta(|x| + |x|^2). \tag{1.35}$$

avec (x, y) qui désigne le produit scalaire de x et y dans $\mathbb{R}^n$. On note $(Y^m_t)_{t\in[0,T]}$ l'unique solution de l'EDS

$$dY^m_t = \sigma(Y^m_t)dW_t + b_m(Y^m_t)dt,\ Y^m_0 = y.$$

10. Vérifier que toute fonction de dérive globalement lipschitzienne est rentrante. Donner un exemple de fonction de dérive b localement lipschitzienne rentrante mais pas globalement lipschitzienne.

11. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, vérifier que la fonction b_m définie dans (1.32) satisfait (1.35).

12. Calculer $|Y_u^m|^2$ à l'aide de la formule d'Itô et en déduire que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u\le t}|Y_u^m|^4\right) \le 4\Bigg\{|y|^4 + 4\beta^2\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t |Y_s^m| + |Y_s^m|^2 ds\right)^2\right) + \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t |\sigma(Y_s^m)|^2 ds\right)^2\right) + 16\mathbb{E}\left(\int_0^t |\sigma^*(Y_s^m)Y_s^m|^2 ds\right)\Bigg\}$$

où $|\sigma(x)|^2 = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le d}} |\sigma_{ij}(x)|^2$.

13. En déduire que $\sup_m \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^m|^4\right) < +\infty$ puis $\mathbb{P}\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*}\{\tau_m = T\}\right) = 1$ où $\tau_m = \inf\{t\in[0,T] : |Y_t^m| > m\}$ (convention $\inf\emptyset = T$)
Conclure à l'existence d'une unique solution $(X_t)_{t\in[0,T]}$ pour (1.31) et que cette solution vérifie $\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t|^4\right) < +\infty$[1].

C'est l'absence de contrôle des moments du schéma d'Euler qui peut empêcher sa convergence dans L^p et sa convergence faible alors que l'on a convergence presque sûre à la vitesse $N^{-\gamma}$ pour tout $\gamma < 1/2$. Dans [21], Hutzenthaler, Jentzen et Kloeden ont proposé le schéma explicite suivant :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^N = \tilde{X}_{t_k}^N + \sigma(\tilde{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \frac{b(\tilde{X}_{t_k}^N)\Delta t}{1 + |b(\tilde{X}_{t_k}^N)|\Delta t}.$$

Lorsque la fonction σ est globalement lipschitzienne, la matrice jacobienne de b est à croissance polynomiale et b vérifie la condition

$$\exists\alpha\in(0,+\infty),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ (x-y, b(x)-b(y)) \le \alpha|x-y|^2$$

qui implique (1.35) pour le choix $y = 0$, alors ils montrent que ce schéma converge à la vitesse forte $\frac{1}{\sqrt{N}}$ dans tous les espaces L^p. Ce résultat de convergence forte reste valable pour le schéma d'Euler semi-implicite

$$\hat{X}_{t_{k+1}}^N - b(\hat{X}_{t_{k+1}}^N)\Delta t = \hat{X}_{t_k}^N + \sigma(\hat{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

sous les mêmes hypothèses.

1.8.4 Convergence en loi de l'erreur renormalisée du schéma d'Euler dans le modèle de Black-Scholes

On s'intéresse à la discrétisation du modèle de Black-Scholes $X_t = e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$ où $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien réel. On se donne un horizon T et un nombre $N\in\mathbb{N}^*$ de pas de discrétisation. Pour $k\in\{0,\dots,N\}$, on pose également $t_k = \frac{kT}{N}$. Pour une suite réelle $(x_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, on note $x_N = \mathcal{O}(N^\alpha)$ lorsque la suite $(N^{-\alpha}x_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

1. Rappeler l'équation différentielle stochastique satisfaite par $(X_t)_{t\ge0}$.

2. Écrire le schéma d'Euler $(X_{t_k}^N)_{k\in\{0,\dots,N\}}$ associé à cette équation. Donner également le schéma de Milstein $(\tilde{X}_{t_k}^N)_{k\in\{0,\dots,N\}}$.

3. Calculer $\mathbb{E}(X_T^N)$ et vérifier que $\mathbb{E}(X_T^N) = \mathbb{E}(X_T) + \mathcal{O}(\frac{1}{N})$. Commenter ce résultat.

[1] Ce résultat s'applique en particulier à l'EDS (1.33).

4. On pose
$$A_k^N = \frac{X_{t_k}^N}{X_{t_{k+1}}}\left(e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}) - \mu t_1\right).$$
Exprimer A_k^N à l'aide de $(\frac{X_{t_k}^N}{X_{t_k}}, \frac{X_{t_{k+1}}^N}{X_{t_{k+1}}})$ et en déduire que $X_T - X_T^N = X_T \sum_{k=0}^{N-1} A_k^N$.

5. On pose
$$R_k^N = e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_1 - \frac{\sigma^2}{2}(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2$$
$$V_k^N = \left(\frac{X_{t_k}}{X_{t_{k+1}}} - 1\right)\left(e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}) - \mu t_1\right)$$
$$Z_k^N = \frac{X_T}{X_{t_{k+1}}}\left(e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}) - \mu t_1\right)(X_{t_k}^N - X_{t_k}).$$
Vérifier que
$$R_k^N + V_k^N + \frac{Z_k^N}{X_T} = A_k^N - \frac{\sigma^2}{2}((W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2 - t_1).$$
En déduire que
$$\sqrt{N}(X_T - X_T^N) = X_T\left(\frac{\sigma^2}{2}S_N + \sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}(R_k^N + V_k^N)\right) + \sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} Z_k^N$$
où $S_N = \sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}[(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})^2 - t_1]$.

On se donne $(G_k)_{k\geq 0}$ suite de variables gaussiennes centrées de variance T indépendantes de $(W_t)_{t\geq 0}$.

6. (a) Montrer que (W_T, S_N) et $(\mathcal{W}_N, \Sigma_N) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}(G_k, G_k^2 - T)$ ont même loi.
   (b) Montrer que lorsque $N \to \infty$, $(\mathcal{W}_N, \Sigma_N)$ converge en loi vers un couple $(\mathcal{W}, \Sigma)$ dont on précisera la loi.
   (c) Conclure que $\frac{\sigma^2}{2}X_T S_N$ converge en loi vers $\sigma^2\sqrt{\frac{T}{2}}X_T G_0$.

D'après les questions 9 à 11, $\mathbb{E}\left|\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}(X_T R_k^N + X_T V_k^N + Z_k^N)\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

7. En admettant provisoirement ce résultat, montrer que $\sqrt{N}(X_T - X_T^N)$ converge en loi vers $\sigma^2\sqrt{\frac{T}{2}}X_T G_0$.

Sous des hypothèses de régularité sur $\eta, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Kurtz et Protter [29] ont montré que si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est solution de l'équation différentielle stochastique $dX_t = \eta(X_t)dW_t + b(X_t)dt$ et $(X_t^N)_{t\in[0,T]}$ désigne son schéma d'Euler en temps continu, alors le processus $(\sqrt{N}(X_t - X_t^N))_{t\in[0,T]}$ converge en loi vers $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ solution de
$$Y_t = \int_0^t Y_s(\eta'(X_s)dW_s + b'(X_s)ds) + \sqrt{\frac{T}{2}}\int_0^t \eta\eta'(X_s)dB_s$$
où $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien indépendant de $(W_t)_{t\in[0,T]}$.

8. Dans le cas particulier du modèle de Black-Scholes, calculer $d\frac{1}{X_t}$ puis $d\frac{Y_t}{X_t}$. En déduire Y_T et vérifier que la convergence établie à la question 7 est bien une conséquence du résultat général de Kurtz et Protter.

9. (a) Calculer $\mathbb{E}(R_0^N)$ et en déduire que $\mathbb{E}(R_k^N) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$.
   Montrer que $R_0^N = \sigma \int_0^{t_1}(X_s - 1 - \sigma W_s)dW_s + \mu \int_0^{t_1}(X_s - 1)ds$. Calculer $\mathbb{E}((X_s - 1 - \sigma W_s)^2)$, vérifier que $\mathbb{E}((X_s - 1 - \sigma W_s)^2) = \mathcal{O}(s^2)$ pour $s \to 0^+$ et en déduire que $\mathbb{E}((R_0^N)^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$.

   (b) Montrer que $\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} R_k^N\right)^2\right) = N(N-1)\mathbb{E}((R_0^N))^2 + N\mathbb{E}((R_0^N)^2)$.

   (c) Conclure que $\mathbb{E}\left|X_T\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} R_k^N\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

On pose $D_k^N = e^{\sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) - \mu t_1$.

10. (a) Calculer $\mathbb{E}(V_0^N)$ et vérifier que $\mathbb{E}(V_0^N) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$.

   (b) Rappeler l'équation différentielle stochastique satisfaite par $\frac{1}{X_t}$ et vérifier que $\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{X_{t_1}} - 1\right)^4\right) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$.
   En remarquant que $D_0^N = \int_0^{t_1}(X_s - 1)(\sigma dW_s + \mu ds)$, vérifier que $\mathbb{E}((D_0^N)^4) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^4})$. En déduire que $\mathbb{E}((V_0^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^3})$.

   (c) Conclure que $\mathbb{E}\left|X_T\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} V_k^N\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

11. (a) Vérifier que $\mathbb{E}((D_k^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$.

   (b) À l'aide de la vitesse forte, en déduire $\mathbb{E}((Z_k^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^3})$.

   (c) Pour $0 \le l < k \le N-1$, vérifier que

$$\mathbb{E}(Z_k^N Z_l^N) = \mathbb{E}(X_{T-t_{k+1}}^2)\mathbb{E}\left(\frac{X_{t_{k+1}}}{X_{t_k}} D_k^N\right) \mathbb{E}\left((X_{t_k}^N - X_{t_k})\frac{X_{t_k}}{X_{t_{l+1}}} D_l^N (X_{t_l}^N - X_{t_l})\right).$$

   Vérifier que $\mathbb{E}\left(\frac{X_{t_{k+1}}}{X_{t_k}} D_k^N\right) = e^{\mu t_1}\left(e^{(\mu+\sigma^2)t_1} - 1 - (\mu+\sigma^2)t_1\right)$. Remarquer que

$$\mathbb{E}\left|(X_{t_k}^N - X_{t_k})\frac{X_{t_k}}{X_{t_{l+1}}} D_l^N (X_{t_l}^N - X_{t_l})\right| \le \sqrt{\mathbb{E}\left(\sup_{t\le T}(X_t^N - X_t)^4\right)\mathbb{E}(X_{t_k - t_{l+1}}^2)\mathbb{E}((D_l^N)^2)}$$

   et en déduire que $\mathbb{E}(Z_k^N Z_l^N) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^4})$.

   (d) Conclure que $\mathbb{E}((\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} Z_k^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$ et que

$$\mathbb{E}\left|\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}(X_T R_k^N + X_T V_k^N + Z_k^N)\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}}).$$

1.8.5 Vitesse forte du schéma de Milstein

On s'intéresse à la discrétisation de l'EDS uni-dimensionnelle

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt \\ X_0 = y \end{cases} \tag{1.36}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien réel de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions C^2 avec des dérivées premières et secondes bornées et $y \in \mathbb{R}$. On se donne un horizon T et un nombre $N \in \mathbb{N}^*$ de pas de discrétisation. Pour $k \in \{0, \ldots, N\}$, on pose $t_k = \frac{kT}{N}$. Pour $t \in [0, T]$, on note respectivement $\tau_t = \lfloor \frac{Nt}{T} \rfloor \frac{T}{N}$ et $\bar{\tau}_t = \lceil \frac{Nt}{T} \rceil \frac{T}{N}$ l'instant de discrétisation juste avant t et l'instant de discrétisation juste après t.

1. Que peut-on dire de $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}(X_t^4)$? Et de $\sup_{0\leq s<t\leq T} \frac{\mathbb{E}[(X_t-X_s)^2]}{t-s}$?
2. Écrire le schéma de Milstein $(\tilde{X}_{t_k}^N)_{k\in\{0,\ldots,N\}}$ associé à cette équation. Donner également son extension en temps continu $(\tilde{X}_t^N)_{t\in[0,T]}$.
3. Vérifier que
$$\forall u \in [0, T],\ \tilde{X}_u^N = y + \int_0^u \left(\sigma(\tilde{X}_{\tau_s}^N) + \sigma\sigma'(\tilde{X}_{\tau_s}^N)(W_s - W_{\tau_s})\right) dW_s + \int_0^u b(\tilde{X}_{\tau_s}^N)ds.$$
4. En déduire que pour $t \in [0, T]$,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,t]} (X_u - \tilde{X}_u^N)^2\right] \leq 3\Bigg(4\int_0^t \mathbb{E}\left[\left(\sigma(X_s) - \sigma(\tilde{X}_{\tau_s}^N) - \sigma\sigma'(\tilde{X}_{\tau_s}^N)(W_s - W_{\tau_s})\right)^2\right] ds \\ + \mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,T]} \left(\int_0^u (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))ds\right)^2\right] + t\int_0^t \mathbb{E}[(b(X_{\tau_s}) - b(\tilde{X}_{\tau_s}^N))^2]ds\Bigg).\end{aligned} \tag{1.37}$$

Dans toute la suite $C \in]0, +\infty[$ désigne une constante qui ne dépend pas de N et peut changer d'une ligne à l'autre.

5. Majoration du second terme du second membre de (1.37) :
   (a) Calculer $db(X_r)$ et en déduire que pour $u \in [0, T]$
   $$\int_0^{\tau_u} (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))ds = \int_0^{\tau_u} (\bar{\tau}_r - r)\left(\sigma b'(X_r)dW_r + [bb' + \frac{\sigma^2 b''}{2}](X_r)dr\right)$$
   puis que $\mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,T]} \left(\int_0^{\tau_u}(b(X_s) - b(X_{\tau_s}))ds\right)^2\right] \leq \frac{C}{N^2}$.

   (b) Vérifier que
   $$\begin{aligned}\sup_{u\in[0,T]} \left(\int_{\tau_u}^u |b(X_s) - b(X_{\tau_s})|ds\right)^2 &\leq \frac{T}{N} \max_{0\leq k\leq N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))^2 ds \\ &\leq \frac{T}{N}\int_0^T (b(X_s) - b(X_{\tau_s}))^2 ds,\end{aligned}$$
   et conclure que $\mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,T]} \left(\int_0^u(b(X_s) - b(X_{\tau_s}))ds\right)^2\right] \leq \frac{C}{N^2}$.

6. Majoration du premier terme du second membre de (1.37) **en supposant $\sigma\sigma'$ lipschitzienne** :

   (a) Calculer $d\sigma(X_r)$ par la formule d'Itô.

   (b) En déduire que pour $s \in [0,T]$,

   $$\sigma(X_s) - \sigma(X_{\tau_s}) - \sigma\sigma'(X_{\tau_s})(W_s - W_{\tau_s}) = \int_{\tau_s}^s (\sigma\sigma'(X_r) - \sigma\sigma'(X_{\tau_s}))dW_r + \int_{\tau_s}^s [b\sigma' + \frac{\sigma^2\sigma''}{2}](X_r)dr,$$

   puis que $\forall s \in [0,T],\ \mathbb{E}\left[(\sigma(X_s) - \sigma(X_{\tau_s}) - \sigma\sigma'(X_{\tau_s})(W_s - W_{\tau_s}))^2\right] \leq \frac{C}{N^2}$.

   (c) Conclure que pour tout $s \in [0,T]$,

   $$\mathbb{E}\left[\left(\sigma(X_s) - \sigma(\tilde{X}^N_{\tau_s}) - \sigma\sigma'(\tilde{X}^N_{\tau_s})(W_s - W_{\tau_s})\right)^2\right] \leq C\left(\mathbb{E}[(X_{\tau_s} - \tilde{X}^N_{\tau_s})^2] + \frac{1}{N^2}\right).$$

7. En supposant $\sigma\sigma'$ lipschitzienne, vérifier que

   $$\forall t \in [0,T],\ \mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,t]}(X_u - \tilde{X}^N_u)^2\right] \leq C\left(\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,s]}(X_u - \tilde{X}^N_u)^2\right]ds + \frac{1}{N^2}\right)$$

   et conclure que $\mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,T]}(X_u - \tilde{X}^N_u)^2\right] \leq \frac{C}{N^2}$ si $\int_0^T \mathbb{E}\left[\sup_{u\in[0,t]}(X_u - \tilde{X}^N_u)^2\right]dt < +\infty$. Comment se passer de cette hypothèse d'intégrabilité?

8. On ne suppose plus que la fonction $\sigma\sigma'$ est lipschitzienne.

   (a) Vérifier que pour $r \in [0,T]$, $\mathbb{E}[(\sigma\sigma'(X_r) - \sigma\sigma'(X_{\tau_r}))^2]$ est majoré par

   $$2\left(\|\sigma'\|^2_\infty \mathbb{E}[(\sigma(X_r) - \sigma(X_{\tau_r}))^2] + \|\sigma''\|^2_\infty \mathbb{E}[\sigma^2(X_{\tau_r})\mathbb{E}[(X_r - X_{\tau_r})^2|\mathcal{F}_{\tau_r}]]\right),$$

   puis par $\frac{C}{N}$.

   (b) Pour $s \in [0,T]$, majorer $\mathbb{E}[(\sigma\sigma'(X_{\tau_s}) - \sigma\sigma'(\tilde{X}^N_{\tau_s}))^2(W_s - W_{\tau_s})^2]$ par

   $$\frac{2T}{N}\left(\|\sigma'\|^2_\infty \mathbb{E}[(\sigma(X_{\tau_s}) - \sigma(\tilde{X}^N_{\tau_s}))^2] + 2\|\sigma'\|_\infty \mathbb{E}^{1/2}[\sigma^4(X_{\tau_s})]\mathbb{E}^{1/2}[(\sigma'(X_{\tau_s}) - \sigma'(\tilde{X}^N_{\tau_s}))^2]\right)$$

   puis par $C\left(\mathbb{E}[(X_{\tau_s} - \tilde{X}^N_{\tau_s})^2] + \frac{1}{N^2}\right)$ (*on pourra utiliser que* $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$).

   (c) Conclure que le contrôle de la vitesse forte quadratique obtenu à la question 7 reste vrai.

9. Expliquer comment généraliser à toute constante $p \geq 1$ l'analyse de l'erreur forte $\mathbb{E}[\sup_{u\in[0,T]}|X_u - \tilde{X}^N_u|^{2p}]$ effectuée ci-dessus dans le cas particulier $p = 1$.

1.8.6 Méthode de Monte Carlo multipas et schéma de Giles et Szpruch

On s'intéresse au calcul de $\mathbb{E}[f(X_T)]$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction C^4 **lipschitzienne** avec des dérivées à croissance polynomiale et $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est la solution de l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions C^4 à dérivées bornées et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On note X_T^N l'approximation de X_T obtenue par un schéma de discrétisation comportant N pas de discrétisation et **dont le temps de calcul est proportionnel à** N. On suppose que les ordres de convergence forte et de convergence faible pour la fonction f de ce schéma sont respectivement égaux à $\alpha/2$ et β avec $\alpha, \beta \geq 1$:

$$\exists C < +\infty,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}[|X_T - X_T^N|^2] \leq \frac{C}{N^\alpha} \text{ et } |\mathbb{E}[f(X_T) - f(X_T^N)]| \leq \frac{C}{N^\beta}.$$

Méthode de Monte Carlo multipas

1. Soit Y un estimateur de $\mathbb{E}[f(X_T)]$ de carré intégrable. Montrer la décomposition biais/variance

$$\mathbb{E}[(\mathbb{E}(f(X_T)) - Y)^2] = (\mathbb{E}[f(X_T) - Y])^2 + \mathrm{Var}\,(Y)$$

de l'erreur quadratique.

2. On suppose que $Y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M f(X_T^{i,N})$ est la moyenne empirique de M copies indépendantes de $f(X_T^N)$.

   (a) Combien de pas N faut-il choisir pour que $(\mathbb{E}[f(X_T) - Y])^2$ soit égal à ε^2 où ε est un niveau de précision donné petit?

   (b) Vérifier que $\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}[(f(X_T) - f(X_T^N))^2] = 0$.
   En déduire que $\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}\,(f(X_T^N)) = \mathrm{Var}\,(f(X_T))$. Combien de copies M faut-il choisir pour que $\mathrm{Var}\,(Y)$ soit égale à ε^2?

   (c) Conclure que le temps de calcul nécessaire pour atteindre la précision ε (i.e. une erreur quadratique égale à $2\varepsilon^2$) est proportionnel à $\varepsilon^{-(2+1/\beta)}$?

3. On s'intéresse maintenant à l'estimateur multipas proposé par Giles [14] $Y = \sum_{l=0}^L Y_{l,M_l}$ où les variables Y_{l,M_l} sont indépendantes et

   - Y_{0,M_0} est la moyenne empirique de M_0 copies indépendantes de $f(X_T^1)$,
   - pour $l \in \{1,\dots,L\}$, Y_{l,M_l} est la moyenne empirique de M_l copies indépendantes de $f(X_T^{2^l}) - f(X_T^{2^{l-1}})$.

   (a) Vérifier que $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[f(X_T^{2^L})]$ et en déduire que

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon \in]0,1[,\ L \geq -\frac{\log_2(\varepsilon/C)}{\beta} \Rightarrow |\mathbb{E}[f(X_T) - Y]| \leq \varepsilon.$$

(b) En remarquant que pour $l \in \mathbb{N}^*$,

$$(f(X_T^{2^l}) - f(X_T^{2^{l-1}}))^2 \leq 2\left((f(X_T^{2^l}) - f(X_T))^2 + (f(X_T) - f(X_T^{2^{l-1}}))^2\right),$$

vérifier que $\sup_{l\in\mathbb{N}^*} 2^{l\alpha}\mathbb{E}[(f(X_T^{2^l}) - f(X_T^{2^{l-1}}))^2] < +\infty$. En déduire

$$\exists \tilde{C} < +\infty \text{ t.q. } \forall L \in \mathbb{N}^*,\ \forall (M_0,\ldots,M_L) \in \mathbb{N}^{*L},\ \mathrm{Var}\,(Y) \leq \tilde{C}\sum_{l=0}^{L}\frac{1}{M_l 2^{l\alpha}}.$$

On pose $p_l = \frac{\tilde{C}}{\varepsilon^2 M_l 2^{l\alpha}}$ pour $l \in \{0,\ldots,L\}$.

(c) Vérifier que $\sum_{l=0}^{L} p_l \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Var}\,(Y) \leq \varepsilon^2$.
Justifier que le temps de calcul de Y est proportionnel à $\tau = \sum_{l=0}^{L} M_l 2^l$.

Pour approcher la minimisation du temps de calcul sous la contrainte $\mathrm{Var}\,(Y) \leq \varepsilon^2$, nous allons minimiser τ sous la contrainte $\sum_{l=0}^{L} p_l \leq 1$.

(d) Vérifier que $\tau = \frac{\varepsilon^2}{\tilde{C}}\left(\sum_{l=0}^{L}(M_l 2^{l(1+\alpha)/2})^2 p_l\right)$ et en déduire à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\tau \geq \frac{\tilde{C}}{\varepsilon^2}\left(\sum_{l=0}^{L} 2^{l(1-\alpha)/2}\right)^2.$$

Vérifier que $\left(M_l = \frac{\tilde{C}\sum_{k=0}^{L} 2^{k(1-\alpha)/2}}{\varepsilon^2 2^{l(1+\alpha)/2}}\right)_{0\leq l\leq L}$ atteint ce minorant et satisfait la contrainte.

(e) En déduire que le temps de calcul pour atteindre la précision ε est d'ordre $\frac{(\log_2(\varepsilon))^2}{\varepsilon^2}$ si $\alpha = 1$ et $\frac{1}{\varepsilon^2}$ si $\alpha > 1$.

4. Comparer les temps de calcul de l'estimateur monopas et de l'estimateur multipas pour le schéma d'Euler.

Pour $j \in \{1,\ldots,d\}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\sigma_j(x) \in \mathbb{R}^n$ la j-ème colonne de la matrice $\sigma(x)$ et $\partial\sigma_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice $\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}(x)\right)_{il}$.

5. Comparer les temps de calcul des deux estimateurs pour le schéma de Milstein (pour lequel $\beta = 1$). Sous quelle condition peut-on effectivement implémenter le schéma de Milstein?

Schéma de Giles et Szpruch et transpositions d'accroissements browniens
Pour $j,m \in \{1,\ldots,d\}$, on définit $\theta_{jm}, \eta_{jm} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $\theta_{jm}(x) = \frac{\partial\sigma_j\sigma_m + \partial\sigma_m\sigma_j}{4}(x)$ et $\eta_{jm}(x) = \frac{\partial\sigma_j\sigma_m - \partial\sigma_m\sigma_j}{4}(x)$. On suppose que les fonctions θ_{jm} sont **lipschitziennes**. On pose

$$\hat{X}_t = x_0 + \sigma(x_0)W_t + b(x_0)t + \sum_{j,m=1}^{d}\theta_{jm}(x_0)W_t^j W_t^m$$

$$\tilde{X}_t = \hat{X}_{\frac{t}{2}} + \sigma(\hat{X}_{\frac{t}{2}})(W_t - W_{\frac{t}{2}}) + b(\hat{X}_{\frac{t}{2}})\frac{t}{2} + \sum_{j,m=1}^{d}\theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}})(W_t^j - W_{\frac{t}{2}}^j)(W_t^m - W_{\frac{t}{2}}^m)$$

6. Vérifier que

$$\exists C < +\infty,\ \forall t \in [0,T],\ \mathbb{E}[|\hat{X}_t - x_0 - \sigma(x_0)W_t|^2] \leq Ct^2 \text{ et } \mathbb{E}[|\hat{X}_t - x_0|^2] \leq Ct.$$

7. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left|(\theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}}) - \theta_{jm}(x_0))(W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t - W^m_{\frac{t}{2}})\right|^2\right] = \frac{t^2(1 + 2 \times 1_{\{j=m\}})}{4} \times \mathbb{E}\left[\left|\theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}}) - \theta_{jm}(x_0)\right|^2\right].$$

En déduire l'existence d'une constante $C < +\infty$ telle que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\Bigg[\Bigg|b(\hat{X}_{\frac{t}{2}})\frac{t}{2} + \sum_{j,m=1}^d \theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}})(W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t - W^m_{\frac{t}{2}}) - b(x_0)\frac{t}{2} - \sum_{j,m=1}^d \theta_{jm}(x_0)(W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t - W^m_{\frac{t}{2}})\Bigg|^2\Bigg] \leq Ct^3.$$

8. Pour $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonction C^1 telle que φ et $\nabla\varphi$ sont Lipschitziennes, en remarquant l'existence d'une variable aléatoire α_t à valeurs dans $[0,1]$ t.q.

$$\varphi(x_0+\sigma(x_0)W_t)-\varphi(x_0)-\nabla\varphi(x_0).\sigma(x_0)W_t = \left(\nabla\varphi(x_0 + \sigma(x_0)\alpha_t W_t) - \nabla\varphi(x_0)\right).\sigma(x_0)W_t,$$

montrer

$$\exists C < +\infty,\ \forall t \in [0,T],\ \mathbb{E}[(\varphi(\hat{X}_t) - \varphi(x_0) - \nabla\varphi(x_0).\sigma(x_0)W_t)^2] \leq Ct^2.$$

En déduire l'existence d'une constante $C < +\infty$ telle que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\Bigg[\Bigg|(\sigma(\hat{X}_{\frac{t}{2}}) - \sigma(x_0))(W_t - W_{\frac{t}{2}}) - \sum_{j,m=1}^d \partial\sigma_j\sigma_m(x_0)W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}})\Bigg|^2\Bigg] \leq Ct^3.$$

9. En utilisant les propriétés de symétrie de θ et η, vérifier que

$$\sum_{j,m=1}^d \partial\sigma_j\sigma_m(x_0)W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}}) = \sum_{j,m=1}^d \theta_{jm}(x_0)\left[W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}}) + W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t - W^m_{\frac{t}{2}})\right] + \sum_{j,m=1}^d \eta_{jm}(x_0)\left[W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}}) - W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t - W^m_{\frac{t}{2}})\right]$$

10. Que vaut $W^j_{\frac{t}{2}}W^m_{\frac{t}{2}} + W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}}) + W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t - W^m_{\frac{t}{2}}) + (W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t - W^m_{\frac{t}{2}})$?

11. En déduire l'existence d'une constante $C < +\infty$ telle que $\forall t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\tilde{X}_t - \hat{X}_t - \sum_{j,m=1}^d \eta_{jm}(x_0)[W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}}) - W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t - W^m_{\frac{t}{2}})]\right|^2\right] \leq Ct^3.$$

On pose

$$\bar{X}_{\frac{t}{2}} = x_0 + \sigma(x_0)(W_t - W_{\frac{t}{2}}) + b(x_0)\frac{t}{2} + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(x_0)(W_t^j - W_{\frac{t}{2}}^j)(W_t^m - W_{\frac{t}{2}}^m)$$

$$\bar{X}_t = \bar{X}_{\frac{t}{2}} + \sigma(\bar{X}_{\frac{t}{2}})W_{\frac{t}{2}} + b(\bar{X}_{\frac{t}{2}})\frac{t}{2} + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(\bar{X}_{\frac{t}{2}})W_{\frac{t}{2}}^j W_{\frac{t}{2}}^m$$

12. Vérifier que $\bar{X}_t$ a même loi que $\tilde{X}_t$ et montrer sans calcul l'existence d'une constante $C < +\infty$ telle que $\forall t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\bar{X}_t - \hat{X}_t - \sum_{j,m=1}^{d} \eta_{jm}(x_0)[(W_t^m - W_{\frac{t}{2}}^m)W_{\frac{t}{2}}^j - (W_t^j - W_{\frac{t}{2}}^j)W_{\frac{t}{2}}^m]\right|^2\right] \leq Ct^3.$$

13. Conclure que

$$\exists C < +\infty,\ \forall t \in [0,T],\ \mathbb{E}\left[\left|\hat{X}_t - \frac{\tilde{X}_t + \bar{X}_t}{2}\right|^2\right] \leq Ct^3.$$

On note maintenant $(\hat{X}^N)$ le schéma défini par $\hat{X}_0^N = x_0$ et la relation de récurrence : $\forall k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\hat{X}_{t_{k+1}}^N = \hat{X}_{t_k}^N + \sigma(\hat{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + b(\hat{X}_{t_{k+1}}^N)\frac{T}{N} + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(\hat{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}}^m - W_{t_k}^m)(W_{t_{k+1}}^j - W_{t_k}^j).$$

Soit $(\bar{X}^{2N})$ le schéma défini comme $(\hat{X}^{2N})$ mais en transposant chaque paire d'accroissements browniens successifs i.e. en remplaçant

$$(W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{2T}{2N}} - W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{3T}{2N}} - W_{\frac{2T}{2N}}, W_{\frac{4T}{2N}} - W_{\frac{3T}{2N}}, \dots, W_{\frac{(2N-1)T}{2N}} - W_{\frac{(2N-2)T}{2N}}, W_{\frac{2NT}{2N}} - W_{\frac{(2N-1)T}{2N}})$$

par $(W_{\frac{2T}{2N}} - W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{4T}{2N}} - W_{\frac{3T}{2N}}, W_{\frac{3T}{2N}} - W_{\frac{2T}{2N}}, \dots, W_{\frac{2NT}{2N}} - W_{\frac{(2N-1)T}{2N}}, W_{\frac{(2N-1)T}{2N}} - W_{\frac{(2N-2)T}{2N}})$.

14. Pourquoi peut-on anticiper le résultat prouvé par Giles et Szpruch [15][2]

$$\exists C < +\infty,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left[\left|\hat{X}_T^N - \frac{\hat{X}_T^{2N} + \bar{X}_T^{2N}}{2}\right|^2\right] \leq \frac{C}{N^2}$$

$$\mathbb{E}\left[\left|\hat{X}_T^N - \hat{X}_T^{2N}\right|^2 + \left|\hat{X}_T^N - \bar{X}_T^{2N}\right|^2\right] \leq \frac{C}{N}?$$

15. On suppose que les dérivées d'ordre 2 de f sont bornées. Montrer que

$$\exists C < +\infty,\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ \left|\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq C|x-y|^2. \tag{1.38}$$

En déduire que $\mathbb{E}\left[\left(f(\hat{X}_T^N) - \frac{f(\hat{X}_T^{2N})+f(\bar{X}_T^{2N})}{2}\right)^2\right] \leq \frac{C}{N^2}$.

On admet que $\beta = 1$ pour le schéma $\hat{X}^N$. Quel est l'ordre du temps de calcul nécessaire pour atteindre la précision ε à l'estimateur multipas $Y = \sum_{l=0}^{L} Y_{l,M_l}$ de $\mathbb{E}[f(X_T)]$ où les variables Y_{l,M_l} sont indépendantes et

[2]Notons que l'estimation (1.38) appliquée à $f = \sigma$ permet de contrôler l'erreur liée au terme d'ordre principal des schémas i.e. le terme linéaire en l'accroissement brownien.

- Y_{0,M_0} est la moyenne empirique de M_0 copies indépendantes de $f(\hat{X}_T^1)$,
- pour $l \in \{1,\dots,L\}$, Y_{l,M_l} est la moyenne empirique de M_l copies indépendantes de $\frac{f(\hat{X}_T^{2^l})+f(\bar{X}_T^{2^l})}{2} - f(\hat{X}_T^{2^{l-1}})$?

1.8.7 discrétisation d'un modèle à volatilité stochastique

On considère le modèle à volatilité stochastique

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + f(Y_t)S_t(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t); \quad S_0 = s_0 > 0 \\ dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t; \quad Y_0 = y_0 \end{cases}, \tag{1.39}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ sont deux mouvements browniens indépendants, $r \in \mathbb{R}$, $\rho \in [-1,1]$ et $f, b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions régulières (c'est-à-dire bornées et dérivables autant de fois qu'on le souhaite avec des dérivées bornées) avec σ qui ne s'annule pas.
On pose $X_t = \ln(S_t)$, $t_k = k\Delta t$ avec $\Delta t = \frac{T}{N}$ où $N \in \mathbb{N}^*$ est un nombre de pas de temps et $T > 0$ une maturité.

1. Que représente le coefficient ρ?

2. Écrire l'équation différentielle stochastique satisfaite par le couple $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$.

3. Comment s'écrit le schéma de Milstein $(\bar{Y}_{t_k}^N)_{0\leq k\leq N}$ de pas Δt pour le processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$? Rappeler sans preuve le résultat de convergence forte du cours pour ce schéma.

4. Déterminer la condition de commutativité qui permet d'implémenter le schéma de Milstein pour le couple $(X_t, Y_t)_{t\in[0,T]}$. Que peut-on dire de la volatilité de $(S_t)_{t\geq 0}$ lorsque la fonction σ est nulle? Et lorsque f' est nulle? Écrire le schéma de Milstein de pas Δt pour le couple $(X_t, Y_t)_{t\in[0,T]}$ lorsque $|\rho| = 1$.

5. On note $\boxed{F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{f}{\sigma}(z)dz}$, fonction que l'on suppose régulière dans la suite. Vérifier que
$$dX_t = \rho dF(Y_t) + \sqrt{1-\rho^2}f(Y_t)dB_t + h(Y_t)dt,$$
pour une fonction h que l'on précisera.

On définit par récurrence $(\bar{X}_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ en posant $\bar{X}_0 = \ln(s_0)$ et $\forall k \in \{0,\dots,N-1\}$,

$$\bar{X}_{t_{k+1}} = \bar{X}_{t_k} + \rho(F(Y_{t_{k+1}}) - F(Y_{t_k})) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(Y_s)ds + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f^2(Y_s)ds}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

6. Vérifier que les vecteurs aléatoires $(\sum_{j=0}^{k-1}\sqrt{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f^2(Y_s)ds}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}))_{1\leq k\leq N}$ et $(\int_0^{t_k} f(Y_s)dB_s)_{1\leq k\leq N}$ ont même loi conditionnelle sachant $(W_t)_{t\in[0,T]}$. En déduire que les vecteurs $(\bar{X}_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ et $(X_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ ont même loi.

Le schéma proposé et étudié dans [24] est le suivant : $\bar{X}_0^N = \ln(s_0)$ et pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\bar{X}_{t_{k+1}}^N = \bar{X}_{t_k}^N + \rho\left(F(\bar{Y}_{t_{k+1}}^N) - F(\bar{Y}_{t_k}^N)\right) + h(\bar{Y}_{t_k}^N)\Delta t + \sqrt{1-\rho^2}\eta_k^N \times (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$
$$\text{où } \eta_k^N = \sqrt{\left(\psi(\bar{Y}_{t_k}^N) + \frac{\sigma\psi'(\bar{Y}_{t_k}^N)}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_s - W_{t_k})ds\right) \vee \underline{\psi}}$$

avec $\psi(y) = f^2(y)$ et $\underline{\psi} = \inf_{y\in\mathbb{R}} \psi(y) = \inf_{y\in\mathbb{R}} f^2(y) \geq 0$. L'objectif final de cet énoncé est de montrer que si $\underline{\psi} > 0$ alors

$$\exists C > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N} |\bar{X}_{t_k} - \bar{X}_{t_k}^N|^2\right) \leq \frac{C}{N^2} \tag{1.40}$$

Dans le reste de l'énoncé on notera C des constantes indépendantes de N qui peuvent varier de ligne en ligne.

7. Comment peut-on simuler le vecteur $(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}, \int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_s - W_{t_k})ds)_{0\leq k\leq N-1}$? En quoi, pour le pricing d'options exotiques, le schéma $(\bar{X}_{t_k}^N)_{0\leq k\leq N}$ est-il aussi performant que le schéma de Milstein?

8. Vérifier que

$$\max_{0\leq k\leq N} |\bar{X}_{t_k} - \bar{X}_{t_k}^N|^2 \leq C\left(T_1^N + \max_{1\leq k\leq N}(T_{2,k}^N)^2 + \max_{1\leq k\leq N}(T_{3,k}^N)^2\right)$$
$$\text{où } T_1^N = \max_{0\leq k\leq N}(F(Y_{t_k}) - F(\bar{Y}_{t_k}^N))^2 + \max_{1\leq k\leq N}\left(\Delta t\sum_{j=0}^{k-1}(h(Y_{t_j}) - h(\bar{Y}_{t_j}^N))\right)^2,$$
$$T_{2,k}^N = \int_0^{t_k} h(Y_s)ds - \Delta t\sum_{j=0}^{k-1} h(Y_{t_j}),$$
$$T_{3,k}^N = \sum_{j=0}^{k-1}\left(\eta_j^N - \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\psi(Y_s)ds}\right)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

9. Vérifier que $\max_{1\leq k\leq N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{k-1}(h(Y_{t_j}) - h(\bar{Y}_{t_j}^N))\right)^2 \leq \max_{1\leq k\leq N-1}(h(Y_{t_k}) - h(\bar{Y}_{t_k}^N))^2$ et en déduire que $\mathbb{E}(T_1^N) \leq \frac{C}{N^2}$?

10. Vérifier que $T_{2,k}^N = \int_0^{t_k}(\bar{\tau}_s - s)\left((bh' + \frac{\sigma^2 h''}{2})(Y_s)ds + \sigma h'(Y_s)dW_s\right)$ où, pour $s \in [0, T]$, $\bar{\tau}_s = \lceil \frac{s}{\Delta t}\rceil\Delta t$ désigne l'instant de discrétisation juste après s. En déduire que $\mathbb{E}(\max_{1\leq k\leq N}(T_{2,k}^N)^2) \leq \frac{C}{N^2}$.

11. (a) Que peut-on dire du processus $(T_{3,k}^N)_{1\leq k\leq N}$? En utilisant l'inégalité de Doob et

le caractère lipschitzien de la racine carrée sur $[\bar{\psi},+\infty[$, en déduire que

$$\mathbb{E}\left(\max_{1\leq k\leq N}(T^N_{3,k})^2\right)\leq \frac{C}{N}\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{N-1}((\bar{T}^j_3)^2+(\tilde{T}^j_3)^2)\right)$$

$$\text{où}\;\; \bar{T}^j_3=\psi(\bar{Y}^N_{t_j})-\psi(Y_{t_j})+\frac{\sigma\psi'(\bar{Y}^N_{t_j})-\sigma\psi'(Y_{t_j})}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(W_s-W_{t_j})ds$$

$$\text{et}\;\tilde{T}^j_3=\psi(Y_{t_j})+\frac{\sigma\psi'(Y_{t_j})}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(W_s-W_{t_j})ds-\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\psi(Y_s)ds.$$

(b) Calculer $\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(W_s-W_{t_j})ds\right)^2\middle|(W_u)_{u\leq t_j}\right)$ et en déduire que $\mathbb{E}((\bar{T}^j_3)^2)\leq\frac{C}{N^2}$.

(c) Vérifier que $\tilde{T}^j_3=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-\bar{\tau}_s)\left((b\psi'+\frac{\sigma^2\psi''}{2})(Y_s)ds+(\sigma\psi'(Y_s)-\sigma\psi'(Y_{t_j}))dW_s\right)$ et en déduire que $\mathbb{E}((\tilde{T}^j_3)^2)\leq\frac{C}{N^2}$.

12. Conclure que (1.40) est vraie.

1.8.8 Simulation du modèle de Cox-Ingersoll-Ross I

On s'intéresse à l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t=a(b-X_t)dt+\sigma\sqrt{X_t}\,dW_t\\ X_0=x_0\end{cases}\tag{1.41}$$

où $a,b,\sigma,x_0>0$ et $(W_t)_{t\geq0}$ est un mouvement brownien réel.
Pour une étude approfondie de schémas de discrétisation pour ce modèle, nous renvoyons à [1].
Soit $T>0$ et $N\in\mathbb{N}^*$. On pose $\Delta t=T/N$ et pour $0\leq k\leq N$, on note $t_k=kT/N=k\Delta t$.

1. (a) Quel résultat assure l'existence d'une unique solution à l'équation

$$\begin{cases} dY_t=-\frac{a}{2}Y_tdt+\frac{\sigma}{2}\,dB_t\\ Y_0=\sqrt{x_0}\end{cases}$$

où $(B_t)_{t\geq0}$ est un mouvement brownien standard. Que peut-on dire du processus $W_t=\int_0^t\left(1_{\{Y_s\geq0\}}-1_{\{Y_s<0\}}\right)dB_s$? Vérifier que $X_t=(Y_t)^2$ est solution de l'équation (1.41) pour $b=\frac{\sigma^2}{4a}$.

(b) On se donne maintenant $(W^1_t,\ldots,W^d_t)_{t\geq0}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ et pour $1\leq i\leq d$ on note Y^i_t la solution de

$$\begin{cases} dY^i_t=-\frac{a}{2}Y^i_tdt+\frac{\sigma}{2}\,dW^i_t\\ Y^i_0=1_{\{i=1\}}\sqrt{x_0}.\end{cases}$$

On pose $X_t=\sum_{i=1}^d(Y^i_t)^2$. Que peut-on dire du processus

$$W_t=\int_0^t 1_{\{X_s>0\}}\frac{1}{\sqrt{X_s}}\sum_{i=1}^d Y^i_sdW^i_s+\int_0^t 1_{\{X_s=0\}}dW^1_s?$$

En déduire que X_t est solution de l'équation (1.41) pour $b = \frac{d\sigma^2}{4a}$.

On admet désormais que **l'équation** (1.41) **possède une unique solution** $(X_t)_{t\geq 0}$ **telle que** $\mathbb{P}(\forall t \geq 0,\ X_t \geq 0) = 1$**.**

2. Vérifier que la variable $\bar{X}^N_{t_1}$ obtenue par le schéma d'Euler prend des valeurs strictement négatives avec probabilité strictement positive. Quel problème cela pose-t-il?

3. On pose $\alpha \overset{\text{déf}}{=} \frac{2ab}{\sigma^2}$ et
$$\forall x > 0,\ s(x) = \int_1^x y^{-\alpha} e^{\alpha y/b} dy.$$
Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $1/n \leq x_0 \leq k$, on pose
$$\begin{aligned} \tau_n^k &= \inf\{t \geq 0,\ X_t \notin]1/n, k[\} \\ \tau^k &= \inf\{t \geq 0,\ X_t \geq k\} \\ \tau_n &= \inf\{t \geq 0,\ X_t \leq 1/n\}. \end{aligned}$$
On admet que $\mathbb{P}(\tau_n^k < +\infty) = 1$.

   (a) Vérifier que $\forall x > 0,\ s''(x) = -\alpha \dfrac{(b-x)}{bx} s'(x)$.

   (b) Calculer $ds(X_t)$. En déduire que $\mathbb{E}\left(s\left(X_{\tau_n^k}\right)\right) = s(x_0)$.

   (c) On suppose que $\alpha > 1$. Donner $\lim_{n\to+\infty} s(1/n)$.
   En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_{\tau_n^k} = 1/n\right)$ puis $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\tau_n > \tau^k)$. Conclure que $\mathbb{P}(\forall t \leq \tau^k,\ X_t > 0) = 1$ puis que $\mathbb{P}(\forall t \geq 0,\ X_t > 0) = 1$.

4. **On se place désormais dans le cas** $\alpha > 1$**.**

   (a) Calculer $< \sqrt{X}, W >_t$.

   (b) En remarquant que pour $0 \leq k \leq N-1$, $\sqrt{X_{t_{k+1}}}\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)$ est égal à
   $$\left(\sqrt{X_{t_{k+1}}} - \sqrt{X_{t_k}}\right)\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right) + \sqrt{X_{t_k}}\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right),$$
   donner la limite en probabilité de $\sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{X_{t_{k+1}}}\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)$ lorsque $N \to +\infty$.

   (c) Conclure que
   $$x_0 + \sum_{k=0}^{N-1}\left[\left(a(b - X_{t_{k+1}}) - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{X_{t_{k+1}}}\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)\right]$$
   converge vers X_T lorsque $N \to +\infty$.
   Ce résultat suggère l'utilisation du schéma implicite suivant
   $$\begin{cases} \tilde{X}_0 = x_0 \ \text{ et pour } 0 \leq k \leq N-1, \\ \tilde{X}_{t_{k+1}} = \tilde{X}_{t_k} + \left(a(b - \tilde{X}_{t_{k+1}}) - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\tilde{X}_{t_{k+1}}}\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right) \end{cases} \tag{1.42}$$
   pour l'équation (1.41). En raison du caractère implicite, il faut vérifier que l'équation de récurrence qui précède a bien une solution.

(d) Vérifier que pour $x > 0$ et $w \in \mathbb{R}$, l'équation

$$(1 + a\Delta t)y^2 - wy - ((\alpha - 1)\sigma^2\Delta t/2 + x) = 0$$

portant sur la variable y admet une unique racine strictement positive $f(x, w)$ que l'exprimera.

(e) En déduire l'existence d'une suite de variables strictement positives $(\tilde{X}_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ vérifiant (1.42).

(f) Pour insister sur la dépendance en la condition initiale x_0, on note $X_T^{x_0}$ la solution de l'équation (1.41) en T et $\tilde{X}_T^{x_0}$ son approximation obtenue par le schéma implicite (1.42). On peut démontrer que $x_0 \to X_T^{x_0}$ est croissante. Vérifier que $x_0 \to \tilde{X}_T^{x_0}$ satisfait la même propriété (*Indication :* on pourra commencer par s'intéresser à la monotonie de la fonction $f(x, w)$ en sa première variable).

5. Pour $\lambda \geq 0$, on note $\varphi(t, \lambda) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda X_t}\right)$ la transformée de Laplace de X_t pour le paramètre λ. En calculant $de^{-\lambda X_t}$, vérifier que φ est solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t\varphi(t, \lambda) + \lambda ab\varphi(t, \lambda) + \left(\lambda a + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right)\partial_\lambda\varphi(t, \lambda) = 0, \ (t, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0, \lambda) = e^{-\lambda x_0}, \ \lambda \in \mathbb{R}_+ \\ \varphi(t, 0) = 1, \ t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

L'obtention d'une telle équation aux dérivées partielles suggère que l'on peut déterminer la loi de X_t. C'est effectivement le cas et il est possible de simuler suivant cette loi, ce qui constitue une alternative au schéma implicite (1.42).

1.8.9 Simulation du modèle de Cox-Ingersoll-Ross II

On s'intéresse à l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = adt + \sigma\sqrt{X_t}\, dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{1.43}$$

où $a, \sigma, x_0 > 0$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien réel.

1. On pose $Y_t = \sqrt{x_0} + \frac{\sigma}{2}B_t$ où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard. Que peut-on dire du processus $W_t = \int_0^t \left(1_{\{Y_s\geq 0\}} - 1_{\{Y_s<0\}}\right) dB_s$? Vérifier que $X_t = (Y_t)^2$ est solution de l'équation (1.43) pour $a = \frac{\sigma^2}{4}$.

   On admet désormais que pour tout $a > 0$**, l'équation** (1.43) **admet une solution** $(X_t)_{t\geq 0}$ **telle que** $\mathbb{P}(\forall t \geq 0,\ X_t \geq 0) = 1$**.**

2. On souhaite maintenant montrer l'unicité pour (1.43). On suppose donc que $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ sont deux solutions telles que $\mathbb{P}(\forall t \geq 0,\ \min(X_t, \tilde{X}_t) \geq 0) = 1$.

   (a) Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $\int_{1/(N^{1/4}\ln N)}^{1/\ln N} \frac{du}{u}$.
   En déduire sans l'expliciter l'existence d'une suite de fonctions $\rho_N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues avec ρ_N nulle en dehors de $[1/(N^{1/4}\ln N), 1/\ln N]$, vérifiant

$$\int_0^{1/\ln(N)} \rho_N(u)du = 1 \ \text{ et } \ \forall u \in \mathbb{R}_+^*,\ \rho_N(u) \leq \frac{8}{u \ln N}.$$

(b) Pour $N \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_N(x) = \int_0^{|x|} \int_0^y \rho_N(u) du dy$. Vérifier que φ_N est une fonction C^2 paire telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi_N''(x)| \leq \min\left(\frac{8}{|x| \ln N}, 8N^{1/4}\right). \tag{1.44}$$

Verifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \varphi_N'(x) \leq 1$. Que vaut $\varphi_N'(x)$ pour $x \geq 1/\ln N$? En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| - \frac{1}{\ln N} \leq \varphi_N(x) \leq |x|. \tag{1.45}$$

Ces fonctions régulières qui approchent la fonction valeur absolue s'appellent fonctions de Yamada.

(c) En remarquant que pour $x, \tilde{x} \geq 0$, $(\sqrt{x} - \sqrt{\tilde{x}})^2 \leq |x - \tilde{x}|$, vérifier que pour $t \geq 0$,

$$\varphi_N(X_t - \tilde{X}_t) \leq \sigma \int_0^t \varphi_N'(X_s - \tilde{X}_s)\left(\sqrt{X_s} - \sqrt{\tilde{X}_s}\right) dW_s + \frac{4\sigma^2 t}{\ln N}.$$

(d) En introduisant les temps d'arrêt, $\eta_M = \inf\left\{s \geq 0 : \left|\sqrt{X_s} - \sqrt{\tilde{X}_s}\right| \geq M\right\}$, montrer que $\mathbb{E}\left(\varphi_N(X_t - \tilde{X}_t)\right) \leq \frac{4\sigma^2 t}{\ln N}$.

(e) Conclure que $\mathbb{E}|X_t - \tilde{X}_t| = 0$.

3. On souhaite désormais discrétiser en temps l'équation (1.43) dans le cas où $\boxed{a \geq \frac{\sigma^2}{4}}$.

On se donne $T > 0$, un entier N supérieur ou égal à 2 et pour $k \in \{0, \ldots, N\}$, on pose $t_k = kT/N$.

(a) Vérifier que la variable $\bar{X}_{t_1}^N$ obtenue par le schéma d'Euler prend des valeurs strictement négatives avec probabilité strictement positive. Quel problème cela pose-t-il?

(b) On note $(X_{t_k}^N)_{0 \leq k \leq N}$ la discrétisation de (1.43) à l'aide du schéma de Milshtein. En remarquant que $X_{t_{k+1}}^N - \left(a - \frac{\sigma^2}{4}\right)\frac{T}{N}$ est une variable aléatoire positive, vérifier que ce schéma est bien défini.

(c) Vérifier que si on note $\tau_s = \left[\frac{Ns}{T}\right]\frac{T}{N}$ le dernier instant de discrétisation avant $s \in [0, T]$, alors

$$X_t^N = x_0 + at + \int_0^t \left(\sigma\sqrt{X_{\tau_s}^N} + \frac{\sigma^2}{2}(W_s - W_{\tau_s})\right) dW_s$$

coïncide avec le schéma de Milshtein aux instant t_k.

(d) Soit $t \in [0, T]$. Calculer $\mathbb{E}(X_t^N)$ et vérifier que

$$\mathbb{E}\left((X_t^N - X_{\tau_t}^N)^2\right) = \left(a^2 + \frac{\sigma^4}{8}\right)(t - \tau_t)^2 + \sigma^2(x_0 + a\tau_t)(t - \tau_t).$$

En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, T],\ \mathbb{E}|X_t^N - X_{\tau_t}^N| \leq \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

(e) Vérifier que pour $t \leq T$,

$$\varphi_N(X_t - X_t^N) \leq \int_0^t \varphi_N'(X_s - X_s^N)\left(\sigma\sqrt{X_s} - \sigma\sqrt{X_{\tau_s}^N} - \frac{\sigma^2}{2}(W_s - W_{\tau_s})\right) dW_s$$
$$+ \int_0^t \varphi_N''(X_s - X_s^N)\left(\sigma^2|X_s - X_{\tau_s}^N| + \frac{\sigma^4}{4}(W_s - W_{\tau_s})^2\right) ds.$$

(f) En utilisant notamment (1.44) et (1.45), en déduire que

$$\mathbb{E}|X_t - X_t^N| \leq \frac{1 + 8\sigma^2 t}{\ln N} + 8\sigma^2 N^{1/4} \int_0^t \mathbb{E}\left(|X_s^N - X_{\tau_s}^N| + \frac{\sigma^2}{4}(W_s - W_{\tau_s})^2\right) ds.$$

(g) Conclure à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,T],\ \mathbb{E}|X_t - X_t^N| \leq \frac{C}{\ln N}.$$

En fait, on peut par cette approche montrer que $(X_t^N, t \in [0,T])_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans un espace complet bien choisi et en déduire l'existence pour (1.43).

4. On se donne maintenant $b \in \mathbb{R}^*$ et on note

$$\frac{1}{b^-} = \begin{cases} -\frac{1}{b} \text{ si } b < 0 \\ +\infty \text{ si } b \geq 0 \end{cases} .$$

(a) Vérifier que pour $t \geq 0$, $\frac{1}{b}(e^{bt} - 1) < \frac{1}{b^-}$ (où par convention $1/0$ est égal à $+\infty$) et montrer que $\left(B_t = \int_0^{\frac{1}{b}(e^{bt}-1)} \frac{dW_u}{\sqrt{1+bu}}\right)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien réel.

(b) Montrer que pour $t < 1/b^-$, $Y_t = \frac{X_t}{1+bt}$ vérifie

$$Y_t = x_0 + \int_0^t (a - bY_u)\frac{du}{1+bu} + \sigma \int_0^t \sqrt{Y_u}\frac{dW_u}{\sqrt{1+bu}}.$$

(c) Vérifier que pour $t \geq 0$, $\max_{0\leq k\leq N-1} \frac{1}{b}\left(e^{b(k+1)t/N} - e^{bkt/N}\right)$ tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$. En déduire que $\sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{Y_{\frac{1}{b}(e^{bkt/N}-1)}} \int_{\frac{1}{b}(e^{bkt/N}-1)}^{\frac{1}{b}(e^{b(k+1)t/N}-1)} \frac{dW_u}{\sqrt{1+bu}}$ converge en probabilité vers $\int_0^{\frac{1}{b}(e^{bt}-1)} \sqrt{Y_u}\frac{dW_u}{\sqrt{1+bu}}$.
Conclure que $\left(Z_t = Y_{\frac{1}{b}(e^{bt}-1)}\right)_{t\geq 0}$ est solution de

$$\begin{cases} dZ_t = (a - bZ_t)dt + \sigma\sqrt{Z_t}\, dB_t \\ Z_0 = x_0, \end{cases}$$

équation pour laquelle on peut montrer l'unicité en procédant comme dans la question 2.

(d) En déduire une méthode pour approcher Z_S où $S > 0$.

1.8.10 Simulation exacte en loi d'une EDS en dimension 1

Ce problème présente dans un cadre simplifié la technique de simulation exacte proposée par Beskos Papaspiliopoulos et Roberts [9].

1. **Méthode du rejet**
   Soit $(W^i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans un espace mesurable $(C, \mathcal{C})$ et $f : C \to [0, M]$ (où $M > 0$) mesurable telle que $\mathbb{E}(f(W^1)) = 1$.
   On se donne également $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'événements tels que conditionnellement à $(W^j)_{j\geq 1}$ les A_i sont indépendants et de probabilités respectives $1 - \frac{f(W^i)}{M}$, ce qui signifie que

$$\forall I \subset \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left(\prod_{i\in I} 1_{A_i}\middle|(W^j)_{j\geq 1}\right) = \prod_{i\in I}\left(1 - \frac{f(W^i)}{M}\right). \tag{1.46}$$

   (a) Pourquoi a-t-on $M \geq 1$? On pose

$$N = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n 1_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\cap A_n^c}.$$

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que

$$\mathbb{E}\left(1_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\cap A_n^c}\middle|(W^j)_{j\geq 1}\right) = \frac{f(W^n)}{M}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{f(W^i)}{M}\right)$$

   En déduire la loi de N et vérifier que $\mathbb{P}(N = 0) = 0$.

   (b) On pose $Y = W^N$. Pour $\varphi : C \to \mathbb{R}_+$ mesurable et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{E}\left(1_{\{N=n\}}\varphi(Y)\right)$. En déduire que les variables aléatoires Y et N sont indépendantes et que

$$\mathbb{E}(\varphi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(W^1)f(W^1)).$$

   (c) Si on dispose d'une suite $(U_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de $(W^i)_{i\geq 1}$, comment génère-t-on usuellement les événements A_i?

2. **Transformation de l'EDS**
   On se donne sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un mouvement Brownien réel $(W_t, t \leq T)$. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous $\mathbb{P}$. On s'intéresse à l'EDS

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s + \int_0^t b(X_s)ds,\ t \leq T$$

   où $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions régulières et $x_0 \in \mathbb{R}$.

   (a) On pose $\eta(x) = \int_{x_0}^x \frac{dz}{\sigma(z)}$. Pourquoi la fonction η est-elle inversible?
   Vérifier que $Y_t = \eta(X_t)$ est solution de l'EDS

$$Y_t = W_t + \int_0^t \gamma(Y_s)ds,\ t \leq T$$

   pour une fonction γ à préciser.

(b) On suppose que $\mathbb{E}\left(\exp\left(-\int_0^T \gamma(Y_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(Y_s)ds\right)\right) = 1$ et on note $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \gamma(Y_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(Y_s)ds\right).$$

Que peut-on dire du processus $(Y_t, t \leq T)$ sous $\mathbb{Q}$?
En déduire que si $\phi : C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est mesurable et positive,

$$\mathbb{E}\left(\phi(Y_t, t \leq T)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) = \mathbb{E}\left(\phi(W_t, t \leq T)\right). \tag{1.47}$$

(c) Vérifier à l'aide de la formule d'Itô que si on pose $G(y) = \int_0^y \gamma(z)dz$,

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-G(Y_T) + \frac{1}{2}\int_0^T [\gamma^2 + \gamma'](Y_s)ds\right).$$

Soit $\varphi : C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mesurable et positive. En choisissant bien ϕ dans (1.47), conclure que

$$\mathbb{E}\left(\varphi(Y_t, t \leq T)\right) = \mathbb{E}\left(\varphi(W_t, t \leq T)f(W_t, t \leq T)\right),$$

où pour $(z_t, t \leq T) \in C([0,T],\mathbb{R})$,

$$f(z_t, t \leq T) = \exp\left(G(z_T) - \frac{1}{2}\int_0^T [\gamma^2 + \gamma'](z_s)ds\right). \tag{1.48}$$

3. **Simulation exacte en loi**
On suppose désormais[3] que la fonction $z \in \mathbb{R} \to H(z) = \exp(G(z))$ est majorée par M_H et que la fonction $z \in \mathbb{R} \to \frac{1}{2}[\gamma^2 + \gamma'](z)$ est à valeurs dans $[m_\gamma, m_\gamma + \lambda]$ avec $M_H, \lambda > 0$ et $m_\gamma \in \mathbb{R}$.

(a) Vérifier que la fonction f définie par (1.48) est majorée par $M = M_H \exp(-m_\gamma T)$ et que la fonction $z \in \mathbb{R} \to l(z) = \frac{1}{2}[\gamma^2 + \gamma'](z) - m_\gamma$ est à valeurs dans $[0, \lambda]$.

(b) On se donne indépendamment de $(W_t, t \leq T)$ deux suites indépendantes de variables aléatoires i.i.d. $(U_i)_{i \geq 0}$ et $(\tau_i)_{i \geq 1}$ avec U_0 de loi uniforme sur $[0,1]$ et τ_1 exponentielle de paramètre λ.
On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n$. Montrer que pour $n \geq 1$ et $(z_t, t \leq T) \in C([0,T],\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}\left(S_n \leq T < S_{n+1}, U_1 \geq \frac{l(z_{S_1})}{\lambda}, \ldots, U_n \geq \frac{l(z_{S_n})}{\lambda}\right)$$
$$= e^{-\lambda T}\int_{D_T^n}\prod_{k=1}^{n}(\lambda - l(z_{t_1+\ldots+t_k}))dt_1 \ldots dt_n$$

[3]Les hypothèses que nous faisons ici sont restrictives dans un but de simplification. Mais cette technique de simulation proposée par Beskos, Papaspiliopoulos et Roberts peut être adaptée dès que

- la fonction $\exp\left(G(z) - \frac{z^2}{2T}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$,
- la fonction $\frac{1}{2}[\gamma^2 + \gamma'](z)$ est minorée par m_γ et l'une de ses limites supérieures pour $z \to +\infty$ ou pour $z \to -\infty$ est finie.

où $D_T^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n : \ t_1 + \ldots + t_n \leq T\}$.
En effectuant un changement de variables approprié dans cette intégrale, en déduire que

$$\mathbb{P}\bigg(S_n \leq T < S_{n+1},\ U_1 \geq \frac{l(z_{S_1})}{\lambda}, \ldots, U_n \geq \frac{l(z_{S_n})}{\lambda}\bigg) = e^{-\lambda T} \frac{\left(\lambda T - \int_0^T l(z_s) ds\right)^n}{n!}.$$

Vérifier que cette formule reste vraie pour $n = 0$.

(c) En déduire que si $\nu = \sum_{n \geq 1} n 1_{\{S_n \leq T < S_{n+1}\}}$,

$$\mathbb{P}\left(U_0 \leq \frac{H(z_T)}{M_H},\ U_1 \geq \frac{l(z_{S_1})}{\lambda}, \ldots, U_\nu \geq \frac{l(z_{S_\nu})}{\lambda}\right) = \frac{f(z_t, t \leq T)}{M}.$$

(d) Soit A l'événement de contraire $A^c = \left\{U_0 \leq \frac{H(W_T)}{M_H}, U_1 \geq \frac{l(W_{S_1})}{\lambda}, \ldots, U_\nu \geq \frac{l(W_{S_\nu})}{\lambda}\right\}$. Calculer $\mathbb{E}(1_A | (W_t, t \leq T))$.

(e) En utilisant la question 1, conclure comment simuler en loi Y_T et donc X_T.

1.8.11 Méthode de Monte Carlo pour les options asiatiques

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne $(W_t)_{t \in [0,T]}$ un mouvement brownien réel standard. On se place dans le modèle de Black-Scholes avec taux d'intérêt r sous la probabilité risque-neutre où le cours à l'instant t de l'actif risqué est $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$. L'objectif de ce problème est de récrire le prix

$$\mathcal{P} = \mathbb{E}\left(e^{-rT} \varphi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\right)$$

de l'option asiatique de payoff φ sous une forme préparant l'application de la méthode de simulation exacte décrite dans le problème 1.8.10.

1. On pose $\gamma = r - \frac{\sigma^2}{2}$ et $X_t = \frac{S_t}{t} \int_0^t e^{-\sigma W_u - \gamma u} du$ pour $t > 0$.

   (a) Vérifier que $X_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_0 e^{\sigma(W_T - W_{T-t}) + \gamma t} dt$.

   (b) Que peut-on dire du processus $(W_T - W_{T-t})_{t \in [0,T]}$?

   (c) En déduire que $\mathcal{P} = \mathbb{E}(e^{-rT} \varphi(X_T))$.

   (d) Donner $\lim_{t \to 0^+} X_t$ et calculer dX_t.

   (e) En déduire que le processus $Y_t = \ln(X_t / S_0)$ est solution de l'EDS

   $$dY_t = \sigma dW_t + \gamma dt + \frac{e^{-Y_t} - 1}{t} dt,\ Y_0 = 0. \tag{1.49}$$

   (f) Pour $\tilde{Y}$ une autre solution de cette équation, vérifier que $d(Y_t - \tilde{Y}_t)^2 \leq 0$ et en déduire l'unicité trajectorielle pour (1.49).

2. Pour $t > 0$ soit $Z_t = \frac{\sigma}{t} \int_0^t s dW_s + \frac{\gamma}{2} t$.

   (a) Pour $u, t \geq 0$, calculer $\mathbb{E}(Z_t)$ et Cov (Z_u, Z_t).

(b) Pour $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T$, que peut-on dire du vecteur $(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})$? Comment peut-on le simuler?

(c) Vérifier que $\frac{1}{t}\int_0^t s dW_s = W_t - \frac{1}{t}\int_0^t W_s ds$ et en déduire $\lim_{t\to 0^+} Z_t$.

(d) Montrer que Z_t est solution de l'EDS

$$dZ_t = \sigma dW_t + \gamma dt - \frac{Z_t}{t}dt,\ Z_0 = 0.$$

Pourquoi est-ce l'unique solution de cette équation?

3. Dans cette question, on admettra que les intégrales que l'on est amené à considérer sont bien définies.

(a) Pour un processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$ adapté à la filtration de W et suffisamment intégrable, donner $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ tel que sous la probabilité $\mathbb{Q}$, $(B_t = W_t - \int_0^t H_s ds)_{t\leq T}$ est un mouvement Brownien.

(b) Préciser H_t pour que Z_t soit solution de l'EDS

$$dZ_t = \sigma dB_t + \gamma dt + \frac{e^{-Z_t} - 1}{t}dt,\ Z_0 = 0.$$

(c) On pose

$$A(t,z) = \frac{1 - z + \frac{z^2}{2} - e^{-z}}{\sigma^2 t} \text{ et } f(t,z) = \left[\frac{A}{t} + \left(\frac{z}{t} - \gamma - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial A}{\partial z}\right)\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right](t,z).$$

En admettant que d'après la loi du logarithme itéré, pour tout $\varepsilon > 0$, $Z_t = o(t^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ en 0^+, donner $\lim_{t\to 0^+} A(t, Z_t)$.

(d) Calculer $dA(t, Z_t)$. En déduire que $\int_0^T H_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T H_t^2 dt = A(T, Z_T) + \int_0^T f(t, Z_t)dt$ puis que

$$\mathcal{P} = \mathbb{E}\left(\psi(Z_T)e^{\int_0^T f(t,Z_t)dt}\right) \text{ où } \psi(z) = e^{-rT}\varphi(S_0 e^z)e^{A(T,z)}.$$

1.8.12 Schéma de Ninomiya Victoir [40]

Dans cette partie, par fonction régulière, on entend une fonction dérivable autant de fois que nécessaire avec des dérivées bornées.

Soit $T > 0$, $y \in \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière et sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien réel standard. On s'intéresse à l'Equation Différentielle Stochastique

$$\begin{cases} X_0 = y, \\ dX_t = dW_t + b(X_t)dt. \end{cases} \tag{1.50}$$

Pour $(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on introduit $x(t,z)$ la solution à l'instant t de l'Equation Différentielle Ordinaire issue de z à l'instant initial et obtenue en enlevant le terme brownien de l'EDS :

$$\begin{cases} x(0,z) = z, \\ \frac{d}{dt}x(t,z) = b(x(t,z)). \end{cases} \tag{1.51}$$

On se donne $N \in \mathbb{N}^*$ et pour $0 \leq k \leq N$, on pose $t_k = kT/N$. On s'intéresse à un schéma de discrétisation proposé récemment par Ninomiya et Victoir. Dans l'exemple simple qui nous intéresse, pour passer du temps t_k au temps t_{k+1}, ce schéma consiste à intégrer[4] l'EDO (1.51) sur l'intervalle $[t_k, \frac{(2k+1)T}{2N}]$ puis à ajouter l'accroissement brownien et enfin à intégrer l'EDO (1.51) sur l'intervalle de temps $[\frac{(2k+1)T}{2N}, t_{k+1}]$:

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = y, \\ \forall k \in \{0, \ldots, N-1\},\ \bar{X}_{t_{k+1}} = x(\frac{T}{2N}, Z_{k+\frac{1}{2}}) \text{ où } Z_{k+\frac{1}{2}} = x(\frac{T}{2N}, \bar{X}_{t_k}) + W_{t_{k+1}} - W_{t_k}. \end{cases} \tag{1.52}$$

L'objectif de ce sujet est de vérifier que l'ordre faible de ce schéma est en $\frac{1}{N^2}$. Pour cela, on s'intéressera au cas d'un coefficient de dérive linéaire avant de traiter le cas général.

Les 2 questions peuvent être traitées de façon indépendante.

1. **Cas d'un coefficient de dérive linéaire :** $\forall y \in \mathbb{R}$, $b(y) = cy$ où $c \in \mathbb{R}^*$.

   (a) Quelle est la solution $x(t, z)$ de l'EDO (1.51)? Préciser le schéma (1.52) dans ce cas particulier. Vérifier que

   $$\forall k \in \{0, \ldots, N\},\ \bar{X}_{t_k} = ye^{ct_k} + e^{\frac{cT}{2N}} \sum_{l=1}^{k} e^{c(t_k - t_l)}(W_{t_l} - W_{t_{l-1}}).$$

   En déduire que Var $(\bar{X}_T) = \frac{e^{2cT}-1}{2c} \times \frac{\frac{cT}{N}}{\sinh(\frac{cT}{N})}$.

   (b) Quelle est la loi de X_T? En déduire que X_T a même loi que $\bar{X}_T + \sqrt{\gamma_N}\, G$ où G est une gaussienne centrée réduite indépendante de $(W_t)_{t \in [0,T]}$ et γ_N une constante que l'on précisera.

   (c) En remarquant que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2, alors

   $$\forall x, z \in \mathbb{R},\ f(x+z) = f(x) + zf'(x) + z^2 \int_0^1 (1-\alpha)f''(x+\alpha z)d\alpha,$$

   en déduire que si f est bornée ainsi que ses dérivées,

   $$\left|\mathbb{E}(f(X_T)) - \mathbb{E}(f(\bar{X}_T))\right| \leq \frac{\sup_{z \in \mathbb{R}} |f''(z)|}{2} \gamma_N.$$

   Conclure que l'ordre faible du schéma est en $1/N^2$.

   (d) On note $\hat{X}_{t_k}$ la valeur obtenue en t_k par le schéma d'Euler avec pas de temps $\frac{T}{N}$. Calculer $\mathbb{E}(\hat{X}_T)$ et Var $(\hat{X}_T)$.

   (e) On suppose $c > 0$. Vérifier que X_T a même loi que $\hat{X}_T + \hat{\eta}_N + \sqrt{\hat{\gamma}_N}\, G$ pour des constantes $\hat{\eta}_N$ et $\hat{\gamma}_N$ à préciser. Retrouver que l'ordre faible du schéma d'Euler est en $1/N$. Comment peut-on améliorer la convergence de ce schéma?

2. **Cas général :** Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, on introduit la solution u, supposée régulière, de l'Equation aux Dérivées Partielles

   $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Lu(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ u(T,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}, \tag{1.53}$$

   où L est le générateur infinitésimal de l'EDS (1.50) : $Lg(x) = \frac{1}{2}g''(x) + b(x)g'(x)$.

[4]Si la solution de l'EDO (1.51) n'a pas d'expression analytique, on peut recourir à un schéma de discrétisation pour cette étape. Il faut choisir ce schéma avec soin pour préserver l'ordre faible du schéma qui en découle pour l'EDS (1.50).

(a) Vérifier que

$$\mathbb{E}(f(\bar{X}_T)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}_k \quad \text{où} \quad \mathcal{E}_k = \mathbb{E}\left(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}}) - u(t_k, \bar{X}_{t_k})\right).$$

(b) Vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = L(Lu)(t,x)$. En admettant provisoirement que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}})|\bar{X}_{t_k})) =& u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + Lu(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k})\frac{T}{N} \\ &+ \frac{1}{2}L(Lu)(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k})\frac{T^2}{N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right),\end{aligned} \tag{1.54}$$

en déduire que $\mathcal{E}_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ et conclure que l'ordre faible du schéma est $1/N^2$.

(c) L'objectif de cette question est de vérifier que pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ régulière

$$\mathbb{E}(g(\bar{X}_{t_1})) = g(y) + Lg(y)t_1 + L(Lg)(y)\frac{t_1^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right), \tag{1.55}$$

propriété qui se généralise facilement en (1.54).

i. Vérifier que

$$g(x(t,z)) = g(z) + (bg')(z)t + \int_0^t \int_0^s b(bg')'(x(r,z))drds$$

et en déduire que pour t au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} g(x(t,z)) &= g(z) + (bg')(z)t + b(bg')'(z)\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}\left(t^3\right) \\ \text{et } x(t,z) &= z + b(z)t + bb'(z)\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}\left(t^3\right). \end{aligned}$$

ii. En déduire que

$$\begin{aligned} g(\bar{X}_{t_1}) =& g\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right) \\ &+ (bg')\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\frac{t_1}{2} \\ &+ b(bg')'\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\frac{t_1^2}{8} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right). \end{aligned}$$

iii. Vérifier que $\mathbb{E}\left((bg')\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\right)$ est égal à

$$bg'(y) + (bg')'(y)b(y)\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}(bg')''(y)t_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

iv. Vérifier que $\mathbb{E}\left(g\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\right)$ est égal à un terme en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ près à la fonction

$$g + g' \times \left(b\frac{t_1}{2} + bb'\frac{t_1^2}{8}\right) + \frac{1}{2}g'' \times \left(b^2\frac{t_1^2}{4} + t_1\right) + \frac{1}{6}g^{(3)} \times \left(3b\frac{t_1^2}{2}\right) + \frac{3t_1^2}{24}g^{(4)}$$

prise au point y ($g^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction g).

v. En remarquant que

$$L(Lg) = \frac{1}{4}b(b'g' + bg'') + \frac{1}{2}b(bg')' + \frac{1}{4}b(bg')' + \frac{1}{2}(bg')'' + \frac{1}{2}bg^{(3)} + \frac{1}{4}g^{(4)},$$

conclure que (1.55) est vérifiée.

Dans le cas de l'EDS générale posée en dimension n avec $(W^1, \dots, W^d)$ un mouvement brownien standard de dimension d :

$$dX_t = \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(X_t)dW_t^j + b(X_t)dt$$

où b et les $\sigma_j = (\sigma_{1j}, \dots, \sigma_{nj})^*$, $1 \leq j \leq d$ sont des fonctions régulières de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, le schéma de Ninomiya et Victoir nécessite de générer une suite $(U_k)_{1\leq k\leq N}$ de variables uniformes sur $[0,1]$ indépendantes et indépendantes de $(W^1, \dots, W^d)$. Pour passer de l'instant t_k à l'instant t_{k+1}, il consiste à

1. intégrer sur la durée $\frac{T}{2N}$ l'EDO $\frac{d}{dt}x(t) = \left[b - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \partial\sigma_j\sigma_j\right](x(t))$ où $\partial\sigma_j = \left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\sigma_{x_l}}\right)_{1\leq i,l\leq n}$.
2. Si $U_{k+1} \leq \frac{1}{2}$, intégrer successivement pour j croissant de 1 à d l'EDO $\frac{d}{dt}x(t) = \sigma_j(x(t))$ sur la durée aléatoire $W^j_{t_{k+1}} - W^j_{t_k}$. Si $U_{k+1} > \frac{1}{2}$, effectuer la même opération mais pour j décroissant de d à 1.
3. Reprendre la première étape.

1.8.13 Schémas de Ninomiya-Victoir [40] et de Ninomiya-Ninomiya [41]

Le résultat de la question préliminaire qui suit sera utilisé à la fin du problème dans les questions 8a et 8c.

1. Soit (X, Y) un couple qui suit la loi gaussienne $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\right)$. On suppose $a > 0$ et on pose $Z = Y - \frac{c}{a}X$.
   (a) Quelle est la loi de (X, Z)?
   (b) Vérifier que $\mathbb{E}(X^4) = 3a^2$, $\mathbb{E}(X^2Y^2) = ab + 2c^2$, $\mathbb{E}(X^3Y) = 3ac$ et $\mathbb{E}(XY^3) = 3bc$.
   (c) Montrer que pour $l, m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^lY^m) = 0$ dès lors que $l + m$ est impair.

Dans toute la suite, par fonction régulière, on entend une fonction dérivable autant de fois que nécessaire avec des dérivées bornées et φ désigne une fonction régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $T > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions régulières. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne également $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$. On s'intéresse à l'Equation Différentielle Stochastique

$$\begin{cases} X_0 = y, \\ dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt. \end{cases} \tag{1.56}$$

On note L l'opérateur différentiel du second ordre défini par

$$L\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x)\partial^2_{x_i x_l}\varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}\varphi(x) \text{ où } a_{il}(x) = \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(x)\sigma_{lj}(x).$$

Pour $j \in \{1,\dots,d\}$, on note également $\sigma_j(x) = (\sigma_{ij}(x))_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ la j-ème colonne de la matrice σ et $\partial\sigma_j(x) = (\partial_{x_i}\sigma_{lj}(x))_{1\le l,i\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

2. Écrire le schéma de Milshtein pour cette EDS. À quelle condition peut-on l'implémenter?

3. Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, on introduit la solution u, supposée régulière, de l'Equation aux Dérivées Partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Lu(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n \\ u(T,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}. \tag{1.57}$$

On note également $(\bar{X}_{t_k})_{0\le k\le N}$ le vecteur obtenu sur la grille temporelle $t_k = \frac{kT}{N}$ par discrétisation de l'EDS (1.56) par un schéma approprié tel que $\bar{X}_0 = y$.

(a) Vérifier que

$$\mathbb{E}(f(\bar{X}_T)) - \mathbb{E}(f(X_T)) = \sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{E}_k \text{ où } \mathcal{E}_k = \mathbb{E}\left(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}}) - u(t_k, \bar{X}_{t_k})\right).$$

(b) Vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = L^2u(t,x)$ où $L^2u = L(Lu)$. En déduire que

$$u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T}{N}Lu(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T^2}{2N^2}L^2u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) = u(t_k, \bar{X}_{t_k}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

(c) Conclure que si pour tout $k \in \{0,\dots,N-1\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}})|\bar{X}_{t_k}) =& u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T}{N}Lu(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) \\ &+ \frac{T^2}{2N^2}L^2u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\end{aligned} \tag{1.58}$$

alors $\mathcal{E}_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ et l'ordre faible du schéma est $1/N^2$.

L'objectif du problème est de démontrer que (1.58) est vérifiée pour deux schémas proposés récemment par Ninomiya et Victoir [40] et par Ninomiya et Ninomiya [41].

4. Pour $j \in \{1, \dots, d\}$, on note V_j l'opérateur différentiel du premier ordre défini par $V_j\varphi(x) = \sigma_j(x).\nabla\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(x)\partial_{x_i}\varphi(x)$. Pour V et W deux opérateurs différentiels, VW désigne l'opérateur différentiel (en général différent de WV) défini par $VW\varphi(x) = V(W\varphi)(x)$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, V^m désigne l'opérateur $\underbrace{V \dots V}_{m \text{ fois}}$.

   Enfin, on pose $V_0 = L - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d V_j^2$.

   (a) Exprimer L^2 à l'aide des V_i, $i \in \{0, \dots, d\}$.

   (b) Montrer que pour $j \in \{1, \dots, d\}$,
$$V_j^2\varphi(x) = \sum_{i,l=1}^n \sigma_{ij}(x)\sigma_{lj}(x)\partial^2_{x_ix_l}\varphi(x) + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\sigma_{lj}(x)\sigma_{ij}(x)\right)\partial_{x_l}\varphi(x)$$
   et en déduire que $V_0\varphi(x) = \sigma_0(x).\nabla\varphi(x)$ où $\sigma_0(x) = b(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \partial\sigma_j\sigma_j(x)$.

5. Pour $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction régulière on note V l'opérateur différentiel du premier ordre défini par $V\varphi(x) = \eta(x).\nabla\varphi(x)$ et $(e^{tV}(x))_{t\in\mathbb{R}}$ l'unique solution de l'Équation Différentielle ordinaire
$$\frac{d}{dt}y(t) = \eta(y(t)), \quad y(0) = x.$$

   (a) Calculer $\frac{d\varphi(e^{tV}(x))}{dt}$ et en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(e^{tV}(x)) = \varphi(x) + \int_0^t V\varphi(e^{sV}(x))ds$.

   (b) En déduire que pour tout $l \in \mathbb{N}$,
$$\varphi(e^{tV}(x)) = \sum_{m=0}^l \frac{t^mV^m\varphi(x)}{m!} + \int_0^t\int_0^{s_1}\dots\int_0^{s_l} V^{l+1}\varphi(e^{s_{l+1}V}(x))ds_{l+1}\dots ds_1.$$
   <u>Indication :</u> écrire l'égalité de la question précédente en remplaçant φ par $V^m\varphi$ où $m \geq 1$.
   Justifier la notation $e^{tV}(x)$ et vérifier que $\varphi(e^{tV}(x)) = \sum_{m=0}^l \frac{t^mV^m\varphi(x)}{m!} + \mathcal{O}(|t|^{l+1})$.

   (c) Soit W un autre opérateur différentiel du premier ordre associé à une fonction régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour $s, t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(e^{sW}e^{tV}(x)) = \sum_{\substack{m_1,m_2\geq 0\\ m_1+m_2\leq l}} \frac{s^{m_1}t^{m_2}V^{m_2}W^{m_1}\varphi(x)}{m_1!m_2!} + \mathcal{O}((|s|\vee|t|)^{l+1}).$$
   <u>Indication :</u> écrire le développement à l'ordre l de $\varphi(e^{sW}(y))$ en une valeur bien choisie de $y \in \mathbb{R}^n$.

6. Soit $t > 0$, $G_1, \dots, G_d$ des gaussiennes centrées réduites indépendantes et pour $j \in \{1, \dots, d\}$, $Z_j = \sqrt{t}G_j$.

   (a) Pour $m = (m_0, \dots, m_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+2}$ on note $\|m\| = 2(m_0 + m_{d+1}) + \sum_{j=1}^d m_j$. Expliquer comment obtenir l'égalité
$$\mathbb{E}\left[\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_1V_1}\dots e^{Z_dV_d}e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right]$$
$$= \sum_{m:\|m\|\leq 5} \frac{t^{\frac{\|m\|}{2}}}{2^{m_0+m_{d+1}}}\frac{V_0^{m_{d+1}}V_d^{m_d}\dots V_1^{m_1}V_0^{m_0}\varphi(x)}{m_0!m_1!\dots m_d!m_{d+1}!}\mathbb{E}[G_1^{m_1}\times\dots\times G_d^{m_d}] + \mathcal{O}(t^3).$$

(b) Remarquer que s'il existe $j \in \{1, \dots, d\}$ tel que m_j est impair, alors $\mathbb{E}[G_1^{m_1} \times \dots \times G_d^{m_d}] = 0$ et en déduire que la somme précédente est restreinte aux $(d+2)$-uplets m tels que $\|m\| \in \{0, 2, 4\}$. Vérifier qu'en dehors du cas $m = (0, \dots, 0)$, les seuls termes non nuls de cette somme correspondent aux cas suivants où on ne précise que les m_i non nuls :

(1) $m_0 + m_{d+1} = 1$,

(2) $m_i = 2$ pour un indice $i \in \{1, \dots, d\}$,

(3) $m_i = 4$ pour un indice $i \in \{1, \dots, d\}$,

(4) $m_i = m_j = 2$ pour un couple d'indices $i < j \in \{1, \dots, d\}$,

(5) $m_i = 2$ pour un indice $i \in \{1, \dots, d\}$ et $m_0 + m_{d+1} = 1$,

(6) $m_0 + m_{d+1} = 2$.

(c) Conclure que

$$\mathbb{E}\left[\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_1V_1}\dots e^{Z_dV_d}e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right] = \varphi(x) + tL\varphi(x)$$
$$+\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{d} V_i^4 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq d} V_j^2V_i^2 + \frac{1}{2}\left\{V_0\sum_{i=1}^{d} V_i^2 + \sum_{i=1}^{d} V_i^2V_0\right\} + V_0^2\right)\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

(d) En déduire que

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_1V_1}\dots e^{Z_dV_d}e^{\frac{t}{2}V_0}(x)) + \frac{1}{2}\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_dV_d}\dots e^{Z_1V_1}e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right]$$
$$= \varphi(x) + tL\varphi(x) + \frac{t^2}{2}L^2\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

7. Le schéma de Ninomiya et Victoir [40] nécessite de générer une suite $(U_k)_{1\leq k\leq N}$ de variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes et indépendantes de $(W^1, \dots, W^d)$. Pour passer de $\bar{X}_{t_k}$ à $\bar{X}_{t_{k+1}}$, il consiste à

(i) Intégrer sur la durée $\frac{T}{2N}$ l'EDO $\frac{d}{dt}y(t) = \sigma_0(y(t))$,

(ii) Si $U_{k+1} \leq \frac{1}{2}$, intégrer successivement pour j croissant de 1 à d l'EDO $\frac{d}{dt}y(t) = \sigma_j(y(t))$ sur la durée aléatoire $W^j_{t_{k+1}} - W^j_{t_k}$. Si $U_{k+1} > \frac{1}{2}$, effectuer la même opération mais pour j décroissant de d à 1.

(iii) Reprendre l'étape **(i)**.

Vérifier que pour ce schéma,

$$\mathbb{E}(\varphi(\bar{X}_{t_1})) = \varphi(y) + \frac{T}{N}L\varphi(y) + \frac{T^2}{2N^2}L^2\varphi(y) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right),$$

propriété qui se généralise facilement en (1.58).

8. L'inconvenient du schéma de Ninomiya et Victoir est qu'il faut intégrer $(d+2)$ EDOs à chaque pas de temps, ce qui peut s'avérer très coûteux. Ninomiya et Ninomiya [41] ont proposé un schéma qui préserve l'ordre de convergence faible en $1/N^2$ mais dans lequel il suffit d'intégrer deux EDOs à chaque pas de temps.

(a) Soit $(G_{1,j}, G_{2,j})_{1\leq j\leq d}$ des couples i.i.d. suivant la loi $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}\right)$. À l'aide de la question 1, montrer que $\mathbb{E}(\prod_{j=1}^d G_{1,j}^{l_j} G_{2,j}^{m_j}) = 0$ dès que la somme des deux coordonnées de l'un des couples $(l_j, m_j) \in \mathbb{N}^2$ est impaire.

(b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Expliquer comment obtenir l'égalité

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\varphi(e^{t\beta V_0+\sqrt{t}\sum_{j=1}^d G_{2,j}V_j} e^{t\alpha V_0+\sqrt{t}\sum_{j=1}^d G_{1,j}V_j}(x))\right)\\
&= \varphi(x) + tV_0\varphi(x)(\alpha+\beta) + t\sum_{j=1}^d V_j^2\varphi(x)\left(\frac{\mathbb{E}(G_{1,j}^2)}{2} + \mathbb{E}(G_{1,j}G_{2,j}) + \frac{\mathbb{E}(G_{1,j}^2)}{2}\right)\\
&+ t^2V_0^2\varphi(x)\left(\frac{\alpha^2}{2} + \alpha\beta + \frac{\beta^2}{2}\right)\\
&+ t^2\sum_{j=1}^d\left\{V_jV_0V_j\varphi(x)\left(\alpha\frac{\mathbb{E}(G_{1,j}^2)}{6} + (\alpha+\beta)\frac{\mathbb{E}(G_{1,j}G_{2,j})}{2} + \beta\frac{\mathbb{E}(G_{2,j}^2)}{6}\right)\right.\\
&\qquad + V_0V_j^2\varphi(x)\left(\alpha\frac{\mathbb{E}(G_{1,j}^2)}{6} + \alpha\frac{\mathbb{E}(G_{1,j}G_{2,j}) + \mathbb{E}(G_{2,j}^2)}{2} + \beta\frac{\mathbb{E}(G_{2,j}^2)}{6}\right)\\
&\qquad + V_j^2V_0\varphi(x)\left(\alpha\frac{\mathbb{E}(G_{1,j}^2)}{6} + \beta\frac{\mathbb{E}(G_{1,j}^2) + \mathbb{E}(G_{1,j}G_{2,j})}{2} + \beta\frac{\mathbb{E}(G_{2,j}^2)}{6}\right)\\
&\qquad \left. + V_j^4\varphi(x)\left(\frac{\mathbb{E}(G_{1,j}^4)}{24} + \frac{\mathbb{E}(G_{1,j}^3G_{2,j})}{6} + \frac{\mathbb{E}(G_{1,j}^2G_{2,j}^2)}{4} + \frac{\mathbb{E}(G_{1,j}G_{2,j}^3)}{6} + \frac{\mathbb{E}(G_{2,j}^4)}{24}\right)\right\}\\
&+ t^2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^d\left\{V_i^2V_j^2\varphi(x)\left(\frac{\mathbb{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}^2)}{24} + \frac{\mathbb{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}G_{2,j})}{6} + \frac{\mathbb{E}(G_{1,i}^2G_{2,j}^2)}{4}\right.\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathbb{E}(G_{1,i}G_{2,i}G_{2,j}^2)}{6} + \frac{\mathbb{E}(G_{2,i}^2G_{2,j}^2)}{24}\right)\\
&\qquad + V_iV_jV_iV_j\varphi(x)\left(\frac{\mathbb{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}^2)}{24} + \frac{\mathbb{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}G_{2,j})}{6} + \frac{\mathbb{E}(G_{1,i}G_{1,j}G_{2,i}G_{2,j})}{4}\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{\mathbb{E}(G_{1,i}G_{2,i}G_{2,j}^2)}{6} + \frac{\mathbb{E}(G_{2,i}^2G_{2,j}^2)}{24}\right)\right\} + \mathcal{O}(t^3)
\end{aligned}$$

(c) Soit $u \geq 1/2$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Vérifier que pour le choix $a = u$, $b = 1 + u - \varepsilon\sqrt{2(2u-1)}$ et $c = -u + \varepsilon\frac{\sqrt{2(2u-1)}}{2}$, $\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}$ est bien une matrice de covariance. En posant également $\alpha = \varepsilon\frac{\sqrt{2(2u-1)}}{2}$ et $\beta = 1-\alpha$, vérifier que

$$\begin{cases}
a + b + 2c = 1 = a^2 + 4ac + 2ab + 4c^2 + 4bc + b^2\\
\alpha a + \beta b + 3(\alpha+\beta)c = 0\\
\alpha a + \beta b + 3\alpha(c+b) = 3/2\\
\alpha a + \beta b + 3\beta(c+a) = 3/2\\
a^2 + 4ac + 6ab + 4bc + b^2 = 3\\
a^2 + 4ac + 6c^2 + 4bc + b^2 = 0
\end{cases}.$$

En déduire que pour ce choix

$$\mathbb{E}\left(\varphi(e^{t\beta V_0+\sqrt{t}\sum_{j=1}^d G_{2,j}V_j} e^{t\alpha V_0+\sqrt{t}\sum_{j=1}^d G_{1,j}V_j}(x))\right) = \varphi(x) + tL\varphi(x) + \frac{t^2}{2}L^2\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

(d) Quel est le schéma de Ninomiya et Ninomiya?

Chapter 2

Réduction de variance

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue les différentes techniques de réduction de variance et voir comment les implémenter lorsque l'on souhaite calculer l'espérance d'une fonction faisant intervenir la trajectoire d'un sous-jacent modélisé à l'aide d'une équation différentielle stochastique.

2.1 Conditionnement

Lorsque l'on souhaite calculer l'espérance d'une variable aléatoire Z $\mathcal{F}$-mesurable intégrable, la méthode de conditionnement consiste à approcher $\mathbb{E}(Z)$ par $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} Y_i$ où les Y_i sont i.i.d. suivant la loi de $Y = \mathbb{E}(Z|\mathcal{G})$ avec $\mathcal{G}$ sous-tribu de $\mathcal{F}$. Notons que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(Z)$ et que lorsque $\mathbb{E}(Z^2) < +\infty$, $\text{Var}\,(Y) = \text{Var}\,(Z) - \mathbb{E}((Z - \mathbb{E}(Z|\mathcal{G}))^2)$ d'après le théorème de Pythagore, ce qui assure que la méthode de conditionnement réduit la variance. La remarque 1.6.6 fournit un exemple d'application de cette technique qui s'applique également pour le calcul du prix d'options dans le modèle à volatilité stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = f(Y_t)X_t(\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^2) + rX_t dt \\ dY_t = \eta(Y_t)dW_t^1 + b(Y_t)dt \end{cases}, (X_0, Y_0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \quad (2.1)$$

où $\eta, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions lipschitziennes, $r \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [-1, 1]$. On a

$$X_T = x_0 \exp\left(rT + \int_0^T f(Y_t)(\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^2) - \frac{1}{2}\int_0^T f^2(Y_t)dt\right).$$

Pour une fonction de payoff φ, on note $v_{\text{BS}}(z, \sigma) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}\varphi\left(ze^{\sigma W_T^2 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}\right)\right)$ le prix de l'option dans le modèle de Black-Scholes avec volatilité constante σ lorsque le sous-jacent vaut z à l'instant initial. Le résultat suivant est le fondement de la technique de conditionnement dans ce contexte.

Proposition 2.1.1.

$$\mathbb{E}(e^{-rT}\varphi(X_T)|W_t^1, t \leq T) = v_{\text{BS}}\left(x_0 e^{\int_0^T \rho f(Y_t)dW_t^1 - \frac{1}{2}\int_0^T \rho^2 f^2(Y_t)dt}, \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (1-\rho^2)f^2(Y_t)dt}\right).$$

Démonstration : La preuve consiste juste à remarquer que lorsque l'on connait $(W_t^1, t \leq T)$, on connait également $(Y_t, t \leq T)$ et à fortiori $\int_0^T \rho f(Y_t)dW_t^1 - \frac{1}{2}\int_0^T \rho^2 f^2(Y_t)dt$. En outre, comme W^2 est indépendant de W^1, la loi conditionnelle de $\int_0^T \sqrt{1-\rho^2} f(Y_t)dW_t^2 - \frac{1}{2}\int_0^T (1-\rho^2)f^2(Y_t)dt$ sachant $(W_t^1, t \leq T)$ est la loi gaussienne $\mathcal{N}_1(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T)$ où $\sigma = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (1-\rho^2)f^2(Y_t)dt}$. Au passage, on remarque que le résultat se généralise au cas où le coefficient de corrélation est une fonction $\rho(Y_t)$ du processus qui dirige la volatilité. $\square$

Lorsque, comme dans le cas du Call $\varphi(z) = (z-K)^+$ ou du Put $\varphi(z) = (K-z)^+$, on dispose d'une formule fermée pour v_{BS}, on peut approcher le prix $\mathbb{E}(e^{-rT}\varphi(X_T))$ de l'option dans le modèle à volatilité stochastique par

$$\mathbb{E}\left(v_{\mathrm{BS}}\left(x_0 e^{\sum_{k=0}^{N-1}\rho f(\bar{Y}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}}^1 - W_{t_k}^1) - \frac{\rho^2 \bar{v} T}{2}}, \sqrt{(1-\rho^2)\bar{v}}\right)\right)$$

$$\text{avec } \bar{v} = \frac{f^2(y_0) + f^2(\bar{Y}_T^N)}{2N} + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} f^2(\bar{Y}_{t_k}^N)$$

où les variables $\bar{Y}_{t_k}^N$ sont obtenues en discrétisant par un schéma approprié l'EDS satisfaite par le processus Y_t.

2.2 Variables de contrôle

Cette méthode consiste à approcher $\mathbb{E}(Z)$ par $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^M (Z_i - Y_i) + \mathbb{E}(Y)$ où Y est une variable aléatoire proche de Z d'espérance connue et les (Y_i, Z_i) sont i.i.d. suivant la loi de (Y, Z). Comme Y est choisie proche de Z, on peut espérer (sans garantie) que la variance de $Z - Y$ soit plus faible que celle de Z. Après avoir exploré cette technique sur trois exemples particuliers, nous verrons que le théorème de représentation des martingales browniennes implique qu'elle a un caractère générique.

2.2.1 Options européennes dans un modèle à volatilité aléatoire

On souhaite calculer le prix $P = \mathbb{E}(Z)$ avec $Z = e^{-rT}(K - X_T)^+$ d'un Put dans le modèle à volatilité aléatoire

$$dX_t = \sigma_t X_t dW_t + rX_t dt,\ X_0 = x_0$$

où

- soit $\sigma_t = \eta(t, X_t)$ et W_t est un mouvement brownien de dimension 1 (*modèle à volatilité locale*),
- soit $\sigma_t = f(Y_t)$ avec le processus Y_t donné par (2.1) et $dW_t = \rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^2$ (*modèle à volatilité stochastique*).

Lorsque le processus de volatilité aléatoire ne fluctue pas trop, on peut utiliser $Y = e^{-rT}\left(K - x_0 e^{\sigma_0 W_T + (r - \frac{\sigma_0^2}{2})T}\right)^+$ comme variable de contrôle. En effet, l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ est

connue par la formule de Black-Scholes. On utilisera bien sûr les mêmes accroissements Browniens pour générer $e^{-rT}(K - \bar{X}_T^N)^+$ en discrétisant X_t par un schéma approprié et pour calculer Y.
Cette technique se généralise immédiatement à toutes les options pour lesquelles une formule explicite est disponible dans le modèle de Black-Scholes.
Dans le cas du modèle à volatilité stochastique, s'il existe une probabilité invariante π pour l'EDS satisfaite par Y_t, remplacer dans la définition de la variable de contrôle Y la valeur initiale σ_0 de la volatilité par $\bar{\sigma} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2(y)\pi(dy)}$ peut s'avérer un meilleur choix, notamment lorsque la maturité T est grande.

2.2.2 Options vanilles générales

On souhaite calculer le prix $C = \mathbb{E}(Z)$ avec $Z = e^{-rT}\varphi(X_T)$ de l'option européenne de payoff φ et de maturité T dans le modèle à volatilité aléatoire

$$dX_t = \sigma_t X_t dW_t + rX_t dt,\ X_0 = x_0$$

introduit au paragraphe précédent. Le sous-jacent actualisé $\xi_t = e^{-rt}X_t$ vérifie

$$d\xi_t = \sigma_t \xi_t dW_t,\ \xi_0 = x_0.$$

En discrétisant ce processus à l'aide du schéma d'Euler, on approche Z par $Z^N = e^{-rT}\varphi(e^{rT}\bar{\xi}_T^N)$ où

$$\bar{\xi}_T^N = x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\sigma}_{t_k}^N \bar{\xi}_{t_k}^N (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

Comme $\mathbb{E}(\bar{\xi}_T^N) = x_0$ est connue, on peut utiliser $Y^\rho = \rho\bar{\xi}_T^N$ où ρ est un paramètre réel à choisir comme variable de contrôle. Lorsque Var $(\bar{\xi}_T^N) > 0$, la variance

$$V(\rho) = \text{Var}\,(Z^N - Y^\rho) = \text{Var}\,(Z^N) - 2\rho\text{Cov}\,(Z^N, \bar{\xi}_T^N) + \rho^2\text{Var}\,(\bar{\xi}_T^N)$$

est minimale pour la valeur $\rho^* = \frac{\text{Cov}\,(Z^N, \bar{\xi}_T^N)}{\text{Var}\,(\bar{\xi}_T^N)}$ du paramètre ρ. Pour ce choix,

$$V(\rho^*) = \text{Var}\,(Z^N) - \frac{\text{Cov}\,^2(Z^N, \bar{\xi}_T^N)}{\text{Var}\,(\bar{\xi}_T^N)} = \text{Var}\,(Z^N) \times \left(1 - \text{Corr}^2(Z^N, \bar{\xi}_T^N)\right)$$

est d'autant plus faible que le coefficient de corrélation $\text{Corr}(Z^N, \bar{\xi}_T^N) = \frac{\text{Cov}\,(Z^N, \bar{\xi}_T^N)}{\sqrt{\text{Var}\,(Z^N)}\sqrt{\text{Var}\,(\bar{\xi}_T^N)}}$ entre Z^N et $\bar{\xi}_T^N$ est proche de 1 en valeur absolue, ce qui n'est pas surprenant.

Exemple 2.2.1. Dans le cas $\varphi(x) = (x - K)^+$ d'un Call, la corrélation entre $Z^N = (\bar{\xi}_T^N - Ke^{-rT})^+$ et $\bar{\xi}_T^N$ sera d'autant plus proche de 1 que le Call sera dans la monnaie, i.e. que le Strike K sera petit. En effet, lorsque K diminue, la probabilité que Z^N soit égale à $\bar{\xi}_T^N - Ke^{-rT}$, variable aléatoire de corrélation 1 avec $\bar{\xi}_T^N$, tend vers 1.

En pratique, si on génère une suite $(Z_i, \xi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de tirages indépendants suivant la loi de $(Z^N, \bar{\xi}_T^N)$, on peut estimer ρ^* en même temps que l'on calcule $\mathbb{E}(Z)$. Si on pose

$$\widehat{Z}_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M Z_i,\ \widehat{Z}^2_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M Z_i^2,\ \widehat{\xi}_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M \xi_i,\ \widehat{\xi}^2_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M \xi_i^2 \text{ et } \widehat{Z\xi}_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M Z_i\xi_i,$$

alors $\widehat{\rho}_M = \frac{\widehat{Z\xi}_M - x_0\widehat{Z}_M}{\widehat{\xi^2_M} - x_0^2}$ est un estimateur de ρ^*. On approche alors $C = \mathbb{E}(Z)$ par

$$\widehat{C}_M = \widehat{Z}_M - \frac{\widehat{Z\xi}_M - x_0\widehat{Z}_M}{\widehat{\xi^2_M} - x_0^2} \times (\widehat{\xi}_M - x_0).$$

Le résultat suivant assure qu'en termes de variance asymptotique, on ne perd rien par rapport à la situation où on connaît ρ^* et on approche $\mathbb{E}(Z)$ par $\widehat{Z}_M - \rho^*(\widehat{\xi}_M - x_0)$.

Proposition 2.2.2. *Si les variables aléatoires $Z^N = e^{-rT}\varphi(e^{rT}\bar{\xi}^N_T)$ et $\bar{\xi}^N_T$ sont de carré intégrable et* Var $(\bar{\xi}^N_T) > 0$*, alors, lorsque M tend vers l'infini, $\widehat{\rho}_M$ converge presque sûrement vers ρ^* et $\sqrt{M}\left(\widehat{C}_M - \mathbb{E}(e^{-rT}\varphi(e^{rT}\bar{\xi}^N_T))\right)$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance $V(\rho^*)$.*

On peut utiliser $\widehat{V}_M = \widehat{Z^2_M} - (\widehat{Z}_M)^2 - \frac{(\widehat{Z\xi}_M - x_0\widehat{Z}_M)^2}{\widehat{\xi^2_M} - x_0^2} = \widehat{Z^2_M} - (\widehat{Z}_M)^2 - (\widehat{\rho}_M)^2(\widehat{\xi^2_M} - x_0^2)$ pour estimer la variance asymptotique $V(\rho^*)$ et construire des intervalles de confiance.

Démonstration : Sous les hypothèses, d'après la loi forte des grands nombres, lorsque M tend vers l'infini, $\widehat{Z\xi}_M$, $\widehat{Z}_M$ et $\widehat{\xi^2_M}$ convergent presque sûrement respectivement vers $\mathbb{E}(Z^N\bar{\xi}^N_T)$, $\mathbb{E}(Z^N)$ et $\mathbb{E}((\bar{\xi}^N_T)^2) > x_0^2$. On en déduit que $\widehat{\rho}_M$ converge presque sûrement vers $\frac{\mathbb{E}(Z^N\bar{\xi}^N_T) - \mathbb{E}(Z^N)\mathbb{E}(\bar{\xi}^N_T)}{\mathbb{E}((\bar{\xi}^N_T)^2) - (\mathbb{E}(\bar{\xi}^N_T))^2} = \rho^*$.

D´après le théorème de la limite centrale $\sqrt{M}\begin{pmatrix} \widehat{Z}_M - \mathbb{E}(Z^N) \\ \widehat{\xi}_M - x_0 \end{pmatrix}$ converge en loi vers un vecteur gaussien en dimension 2 centré et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} \text{Var }(Z^N) & \text{Cov }(Z^N, \bar{\xi}^N_T) \\ \text{Cov }(Z^N, \bar{\xi}^N_T) & \text{Var }(\bar{\xi}^N_T) \end{pmatrix}$. On déduit alors du théorème de Slutsky que

$$\sqrt{M}\left(\widehat{C}_M - \mathbb{E}(Z^N)\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\widehat{\rho}_M \end{pmatrix} . \sqrt{M}\begin{pmatrix} \widehat{Z}_M - \mathbb{E}(Z^N) \\ \widehat{\xi}_M - x_0 \end{pmatrix}$$

converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance $\begin{pmatrix} 1 \\ -\rho^* \end{pmatrix} . \Gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho^* \end{pmatrix} = V(\rho^*)$.

□

2.2.3 Technique de Kemna et Vorst[26] pour les options asiatiques

Si on souhaite calculer le prix $C = \mathbb{E}(Z)$ avec $Z = e^{-rT}\left(\frac{y}{T}\int_0^T e^{\sigma W_s + (r - \frac{\sigma^2}{2})s}ds - K\right)^+$ d'un Call asiatique dans le modèle de Black-Scholes, on peut utiliser la technique de variable de contrôle proposée par Kemna et Vorst [26]. Cette technique consiste à approcher la moyenne de l'exponentielle $\frac{1}{T}\int_0^T e^{\sigma W_s + (r - \frac{\sigma^2}{2})s}ds$ par l'exponentielle de la moyenne $\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \sigma W_s + (r - \frac{\sigma^2}{2})sds\right)$. Cette approximation est d'autant meilleure que le taux d'intérêt r et la volatilité σ sont petits. Notons que d'après l'inégalité de Jensen,

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{\sigma W_s + (r - \frac{\sigma^2}{2})s}ds \geq \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \sigma W_s + (r - \frac{\sigma^2}{2})sds\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\int_0^T W_s ds\right) &= \mathrm{Cov}\left(\int_0^T W_s ds, \int_0^T W_t dt\right) = \int_0^T \int_0^T \mathrm{Cov}\,(W_s, W_t) ds dt \\ &= 2\int_0^T \int_0^t \mathrm{Cov}\,(W_s, W_t) ds dt = \int_0^T \int_0^t 2s ds dt = \int_0^T t^2 dt = \frac{T^3}{3}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{1}{T}\int_0^T \sigma W_s + (r - \frac{\sigma^2}{2}) s ds \sim \mathcal{N}_1\left((r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{2}, \frac{\sigma^2 T}{3}\right)$ et l'espérance de $Y = e^{-rT}\left(y \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \sigma W_s + (r - \frac{\sigma^2}{2}) s ds\right) - K\right)^+$ s'obtient par une formule analogue à la formule de Black-Scholes. Ainsi, on peut utiliser Y comme variable de contrôle.

Remarque 2.2.3.
- Pour calculer un Call asiatique dans le modèle à volatilité aléatoire considéré au paragraphe 2.2.1, on peut utiliser la variable de contrôle Y avec le paramètre σ égal à σ_0, la valeur initiale de la volatilité aléatoire.
- En pratique, on doit discrétiser l'intégrale en temps dans Z. D'après le paragraphe 1.7, pour réduire le biais, il convient d'utiliser la méthode des trapèzes et approcher Z par $Z^N = e^{-rT}\left(\frac{y}{2N}\left(1 + e^{\sigma W_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} + 2\sum_{k=1}^{N-1} e^{\sigma W_{t_k} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_k}\right) - K\right)^+$. La variable de contrôle associée est

$$Y^N = e^{-rT}\left(y \exp\left(\frac{\sigma}{2N}\left[W_T + 2\sum_{k=1}^{N-1} W_{t_k}\right] + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{2}\right) - K\right)^+.$$

  On peut bien sûr calculer la variance de la variable aléatoire gaussienne centrée $W_T + 2\sum_{k=1}^{N-1} W_{t_k}$ et en déduire $\mathbb{E}(Y^N)$ par une formule de type Black-Scholes. Ce calcul, plus délicat que celui que nous avons effectué en temps continu plus haut, s'avère inutile ici. Comme $\mathbb{E}(Y - Y^N)$ est proche de $\mathbb{E}(Z - Z^N)$, pour réduire le biais lié à la discrétisation en temps, on préfèrera approcher $\mathbb{E}(Z)$ par $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(Z_i^N - Y_i^N) + \mathbb{E}(Y)$.

2.2.4 Variables de contrôle et représentation des martingales

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t))_{t\geq 0}$. Rappelons le théorème de représentation des martingales browniennes.

Théorème 2.2.4. *Soit Z une variable aléatoire réelle $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable. Alors, il existe un unique processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_t$-adapté et vérifiant $\mathbb{E}\left(\int_0^T |H_t|^2 dt\right) < +\infty$ tel que*

$$Z = \mathbb{E}(Z) + \int_0^T H_t . dW_t \tag{2.2}$$

Lorsque l'on souhaite calculer $\mathbb{E}(Z)$, la variable aléatoire centrée $Y = \int_0^T H_t . dW_t$ est une variable de contrôle parfaite au sens où $\mathrm{Var}\,(Z - Y) = 0$. En général, on ne sait malheureusement pas expliciter le processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$. On peut néanmoins le faire dans le cas particulier

$$\begin{cases} Z = e^{-\int_0^T r(X_s)ds}\varphi(X_T) + \int_0^T e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\psi(X_t)dt \\ dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt,\ X_0 = y \end{cases}$$

où $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions lipschitziennes, $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à croissance sous linéaire, $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction minorée et $y \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 2.2.5. *Soit $a(x) = \sigma(x)\sigma^*(x)$. Si $u(t,x)$ est une fonction de $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ avec des dérivées partielles dans les coordonnées de $x = (x_1,\dots,x_n)$ bornées, solution de l'EDP*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_i x_j} u(t,x) \\ \qquad\qquad + b(x).\nabla_x u(t,x) + \psi(x) - r(x)u(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n \\ u(T,x) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

alors $H_t = e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\sigma^*(X_t)\nabla_x u(t,X_t)$ i.e.

$$Z = \mathbb{E}(Z) + \int_0^T e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\nabla_x u(t,X_t).\sigma(X_t)dW_t.$$

Démonstration : D'après la formule d'Itô, puis l'EDP satisfaite par la fonction u,

$$\begin{aligned} de^{-\int_0^t r(X_s)ds}u(t,X_t) &= e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\left(-ru + \partial_t u + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{x_i x_j}u + b.\nabla_x u\right)(t,X_t)dt \\ &\quad + e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\nabla_x u(t,X_t).\sigma(X_t)dW_t \\ &= e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\left(-\psi(X_t)dt + \nabla_x u(t,X_t).\sigma(X_t)dW_t\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

En intégrant entre 0 et T, on en déduit

$$e^{-\int_0^T r(X_s)ds}u(T,X_T) - u(0,y) = \int_0^T e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\left(-\psi(X_t)dt + \nabla_x u(t,X_t).\sigma(X_t)dW_t\right).$$

Avec la condition terminale dans l'EDP vérifiée par u et la définition de Z, cette équation se récrit

$$Z = u(0,y) + \int_0^T e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\nabla_x u(t,X_t).\sigma(X_t)dW_t.$$

En prenant l'espérance dans cette égalité, on obtient $\mathbb{E}(Z) = u(0,y)$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque 2.2.6. Soit $\tau \in [0,T]$. En intégrant (2.3) entre τ et T, puis en prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_\tau$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{-\int_0^T r(X_s)ds}\varphi(X_T) + \int_\tau^T e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\psi(X_t)dt\middle|\mathcal{F}_\tau\right) = e^{-\int_0^\tau r(X_s)ds}u(\tau,X_\tau).$$

Dans le cas où $\psi \equiv 0$, cette égalité se récrit $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_\tau) = e^{-\int_0^\tau r(X_s)ds}u(\tau,X_\tau)$.

En pratique, connaître la fonction u sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ est bien sûr un problème plus difficile que connaître $\mathbb{E}(Z) = u(0,y)$. Mais si on dispose d'une approximation $\bar{u}$ de u, on peut essayer de remplacer u par $\bar{u}$ dans la formule qui donne la variable de contrôle parfaite

$\int_0^T e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\nabla_x u(t,X_t).\sigma(X_t)dW_t$. Lorsque Z est approchée en utilisant un schéma de discrétisation $(\bar{X}^N_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ pour le processus X_t, on évalue l'espérance de

$$e^{-\frac{T}{N}\sum_{k=0}^{N-1} r(\bar{X}^N_{t_k})}\varphi(\bar{X}^N_T)+\sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{T}{N}\sum_{j=0}^{k-1} r(\bar{X}^N_{t_j})}\left[\frac{T}{N}\psi(\bar{X}^N_{t_k}) - \nabla_x\bar{u}(t_k,\bar{X}^N_{t_k}).\sigma(\bar{X}^N_{t_k})(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})\right]$$

par la méthode de Monte-Carlo pour calculer $\mathbb{E}(Z)$.
Il est possible de choisir comme fonction $\bar{u}$ la solution de l'EDP obtenue en figeant les fonctions a, b, ψ et r à leur valeur au point y dans l'équation satisfaite par u.

2.3 Fonction d'importance

Le principe de cette méthode est le suivant. Si $\tilde{\mathbb{P}}$ est une probabilité telle que la mesure de densité $1_{\{Z\neq 0\}}$ par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$ de départ est absolument continue par rapport à $\tilde{\mathbb{P}}$, alors, $\mathbb{E}(Z)=\tilde{\mathbb{E}}\left(Z\frac{1_{\{Z\neq 0\}}d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\right)$. Bien sûr, il sera intéressant d'approcher $\mathbb{E}(Z)$ par la moyenne empirique correspondant à $\tilde{\mathbb{E}}\left(Z\frac{1_{\{Z\neq 0\}}d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\right)$ lorsque

$$\tilde{\mathbb{E}}\left(Z^2\left(\frac{1_{\{Z\neq 0\}}d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\right)^2\right)=\mathbb{E}\left(Z^2\frac{1_{\{Z\neq 0\}}d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\right)<\mathbb{E}(Z^2).$$

Notons que

$$\tilde{\mathbb{E}}\left(Z^2\left(\frac{1_{\{Z\neq 0\}}d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\right)^2\right)\geq\left(\tilde{\mathbb{E}}\left(|Z|\frac{1_{\{Z\neq 0\}}d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\right)\right)^2=(\mathbb{E}|Z|)^2.$$

Lorsque $\mathbb{P}(Z\neq 0)>0$ i.e. $\mathbb{E}|Z|>0$, le choix $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}=\frac{|Z|}{\mathbb{E}|Z|}$ est optimal puisqu'il permet d'atteindre ce minorant. Le cas particulier $Z=f(X)$ et $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}=\frac{\tilde{p}(X)}{p(X)}$ avec $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ vecteur aléatoire de densité p par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ sous $\mathbb{P}$ et $\tilde{p}$ densité sur $\mathbb{R}^n$ qui s'annule lorsque p s'annule (pour assurer que $\mathbb{E}\left(\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right)=1$) et qui est non nulle lorsque le produit $f\times p$ est non nul (pour que $1_{\{Z\neq 0\}}d\mathbb{P}$ soit absolument continue par rapport à $\tilde{\mathbb{P}}$) est important en pratique. Comme X possède la densité $\tilde{p}$ sous $\tilde{\mathbb{P}}$, on associe alors à $\tilde{\mathbb{E}}\left(Z\frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\right)$ la moyenne empirique $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^M\frac{fp}{\tilde{p}}(Y_i)$ où les variables aléatoires $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont i.i.d. de densité commune $\tilde{p}$.

2.3.1 Changement de dérive dans le modèle de Black-Scholes

Si on souhaite calculer le prix du Call sur moyenne

$$C=\mathbb{E}\left(e^{-rT}\left(\frac{y}{T}\int_0^T e^{\sigma W_t+(r-\frac{\sigma^2}{2})t}dt-K\right)^+\right)$$

avec $y<<K$, seule une faible proportion des tirages va avoir une contribution non nulle à l'espérance. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, d'après le théorème de Girsanov, sous la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ de

densité $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = e^{\lambda W_T - \frac{\lambda^2 T}{2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$, le processus $(\tilde{W}_t = W_t - \lambda t)_{t\leq T}$ est un mouvement brownien. Comme $\frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}} = e^{-\lambda W_T + \frac{\lambda^2 T}{2}} = e^{-\lambda \tilde{W}_T - \frac{\lambda^2 T}{2}}$, on a

$$\begin{aligned} C &= \tilde{\mathbb{E}}\left(e^{-rT}\left(\frac{y}{T}\int_0^T e^{\sigma\tilde{W}_t + (r+\sigma\lambda-\frac{\sigma^2}{2})t}dt - K\right)^+ e^{-\lambda\tilde{W}_T - \frac{\lambda^2 T}{2}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{-rT}\left(\frac{y}{T}\int_0^T e^{\sigma W_t + (r+\sigma\lambda-\frac{\sigma^2}{2})t}dt - K\right)^+ e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2 T}{2}}\right). \end{aligned}$$

En choisissant λ tel que $\frac{y}{T}\int_0^T e^{(r+\sigma\lambda-\frac{\sigma^2}{2})t}dt = K$, on garantit qu'une proportion significative des tirages va contribuer à l'espérance de la variable aléatoire au membre de droite, ce qui devrait réduire sa variance.

2.3.2 Cadre général

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t))_{t\geq 0}$. Pour une large classe de variables aléatoires $\mathcal{F}_T$-mesurables, il existe un changement de probabilité qui annule la variance [36] :

Proposition 2.3.1. *Soit Z une variable aléatoire de carré intégrable $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $\exists\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(Z \geq \varepsilon) = 1$ et $(H_t)_{t\leq T}$ le processus $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^T |H_t|^2 dt\right) < +\infty$ et*

$$Z = \mathbb{E}(Z) + \int_0^T H_t.dW_t \tag{2.4}$$

donné par le théorème 2.2.4. Alors, si on pose $h_t = \frac{H_t}{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)}$,

$$\mathbb{P}\left(Ze^{-\int_0^T h_t.dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T |h_t|^2 dt} = \mathbb{E}(Z)\right) = 1.$$

Remarque 2.3.2.
- Comme $\mathbb{P}(Z \geq \varepsilon) = 1$, on a pour tout $t \in [0,T]$, $\mathbb{P}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t) \geq \varepsilon) = 1$ et $\mathbb{E}\left(\int_0^T |h_t|^2 dt\right) < +\infty$.
- En termes de fonction d'importance, ce résultat s'interprète de la façon suivante : sous la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ de densité $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = e^{\int_0^T h_t.dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T |h_t|^2 dt}$ par rapport à $\mathbb{P}$, la variable aléatoire $Z\frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}} = Ze^{-\int_0^T h_t.dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T |h_t|^2 dt}$ est presque sûrement égale à son espérance $\mathbb{E}(Z)$. Notons qu'en prenant l'espérance dans (2.5) ci-dessous, on vérifie que $\mathbb{E}\left(e^{\int_0^T h_t.dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T |h_t|^2 dt}\right) = 1$.
- Notons qu'en finance, par positivité des payoffs, les variables aléatoires dont on souhaite calculer l'espérance sont le plus souvent positives et qu'il suffit de leur ajouter $\varepsilon > 0$ pour que l'hypothèse de minoration soit satisfaite.

Démonstration : On pose $\phi_t = \frac{\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{E}(Z)}$. En divisant (2.4) par $\mathbb{E}(Z)$ et en prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, il vient

$$\phi_t = 1 + \int_0^t \frac{H_s}{\mathbb{E}(Z)}.dW_s = 1 + \int_0^t \phi_s h_s.dW_s.$$

L'unique solution de cette équation affine est $\phi_t = e^{\int_0^t h_s.dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h_s|^2 ds}$. Pour $t = T$, cette égalité s'écrit

$$\frac{Z}{\mathbb{E}(Z)} = e^{\int_0^T h_s.dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |h_s|^2 ds}. \tag{2.5}$$

□

Dans le cas particulier où $Z = e^{-\int_0^T r(X_s)ds}\varphi(X_T)$ avec

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt,\ X_0 = y,$$

d'après la proposition 2.2.5, si pour $a = \sigma\sigma^*$, $u(t,x)$ est solution $C^{1,2}$ de l'EDP

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_i x_j} u(t,x) + b(x).\nabla_x u(t,x) - r(x)u(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n \\ u(T,x) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

alors $H_t = e^{-\int_0^t r(X_s)ds}\sigma^*(X_t)\nabla_x u(t,X_t)$. Par ailleurs, d'après la remarque 2.2.6, $\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t) = e^{-\int_0^t r(X_s)ds}u(t,X_t)$. Donc

$$\boxed{h_t = \frac{\sigma^*(X_t)\nabla_x u(t,X_t)}{u(t,X_t)}.}$$

Bien sûr, si on ne connaît pas $u(0,y) = \mathbb{E}(Z)$, il est illusoire de supposer que l'on connaît toute la fonction u. On peut néanmoins remplacer u dans h_t et $e^{-\int_0^T h_t.dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T |h_t|^2 dt}$ par une approximation $\bar{u}$ calculée par exemple en figeant les coefficients a, b, r dans l'EDP à leur valeur en y.

2.4 Variables antithétiques

Soit $F : \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(F^2((W_t)_{t\leq T})) < +\infty$. Comme $-W = (-W_t)_{t\leq T}$ a même loi que $W = (W_t)_{t\leq T}$, pour calculer $\mathbb{E}(F(W))$ l'estimateur sans biais $\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^M (F(W^i) + F(-W^i))$ est plus précis que $\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{2M} F(W^i)$ dès lors que Cov $(F(W), F(-W)) \leq 0$. En outre, il est plus rapide à calculer puisqu'il ne fait intervenir que M mouvements browniens indépendants W^i.

On se place en dimension $d = 1$ et on se donne une fonction de payoff f **monotone**. D'après le problème du paragraphe 2.5, la covariance est négative pour

- $F((w_t)_{t\leq T}) = f(ye^{\sigma w_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T})$, ce qui correspond au prix $\mathbb{E}\left(f(ye^{\sigma W_T + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}\right)$ d'une option européenne vanille,
- $F((w_t)_{t\leq T}) = f\left(\frac{y}{T}\int_0^T e^{\sigma w_t + (r-\frac{\sigma^2}{2})t}dt\right)$ i.e. pour le prix $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{y}{T}\int_0^T e^{\sigma W_t + (r-\frac{\sigma^2}{2})t}dt\right)\right)$ d'une option européenne asiatique,
- $F((w_t)_{t\leq T}) = f\left(y\max_{t\in[0,T]} e^{\sigma w_t + (r-\frac{\sigma^2}{2})t}\right)$, ce qui correspond au prix $\mathbb{E}\left(f\left(y\max_{t\in[0,T]} e^{\sigma W_t + (r-\frac{\sigma^2}{2})t}\right)\right)$ d'une option européenne sur maximum.

En pratique pour le calcul de l'option asiatique, on doit discrétiser l'intégrale en temps. En reprenant la démarche de la question 4. du problème, on vérifie que la covariance reste négative pour

$$F((w_t)_{t\leq T}) = f\left(\frac{y}{N}\left(\frac{1+e^{\sigma w_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}e^{\sigma w_{\frac{kT}{N}}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{kT}{N}}\right)\right)$$

c'est-à-dire pour la discrétisation par la méthode des trapèzes préconisée au paragraphe 1.7.

Dans le cas de l'option sur maximum, on remarque que comme $\sigma > 0$,

$$\max_{t\in[0,T]} e^{\sigma W_t+(r-\frac{\sigma^2}{2})t} = \exp\left(\sigma \max_{t\in[0,T]}(W_t+\alpha t)\right)$$

où $\alpha = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$. On déduit alors de la preuve de la proposition 1.6.1 et du lemme 1.6.3 que $\max_{t\in[0,T]} e^{\sigma W_t+(r-\frac{\sigma^2}{2})t}$ a même loi que $\exp\left(\frac{\sigma}{2}(W_T+\alpha T+\sqrt{(W_T+\alpha T)^2-2T\ln(U)})\right)$ où U est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$ indépendante de W. Comme la fonction

$$\varphi(w,u) = f\left(y\exp\left(\frac{\sigma}{2}(w+\alpha T+\sqrt{(w+\alpha T)^2-2T\ln(u)})\right)\right)$$

est monotone en chacune de ses deux variables, en adaptant la question 3. du problème, on vérifie que $\mathrm{Cov}\left(\varphi(W_T,U),\varphi(-W_T,1-U)\right)\leq 0$. On utilisera donc $\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^M(\varphi(W_T^i,U^i)+\varphi(-W_T^i,1-U^i))$ pour calculer le prix de l'option sur maximum.

2.5 Problème : Variables antithétiques

On se donne $(G_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi gaussienne centrée réduite.
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est monotone (resp. croissante) en chacune de ses variables si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'application qui à $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ associe

$$(y - x)\,(f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n))$$

est de signe constant (resp. positive) sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Quelle est la loi de $-G_i$?

2. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes et bornées.

   (a) Quel est le signe de $(f(G_1) - f(G_2))(g(-G_1) - g(-G_2))$?
   En déduire que Cov $(f(G_1), g(-G_1)) \leq 0$.

   (b) Pour l'estimation de $\mathbb{E}(f(G_1))$, quelle variable faut-il préférer entre $\frac{1}{2I}\sum_{i=1}^{2I} f(G_i)$ et $\frac{1}{2I}\sum_{i=1}^{I}(f(G_i) + f(-G_i))$? (comparer à la fois la précision et l'effort de calcul).

3. Nous allons voir que la technique de réduction de variance précédente s'étend à la dimension $n \geq 2$ et même à la dimension infinie.
   On suppose que pour ϕ et $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ croissantes en chacune de leurs variables et bornées,
   $$\text{Cov}\ (\phi(G_1, \ldots, G_{n-1}), \psi(-G_1, \ldots, -G_{n-1})) \leq 0$$
   et on se donne f et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ croissantes en chacune de leurs variables et bornées.

   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, quel-est le signe de
   $$\mathbb{E}(f(G_1, \ldots, G_{n-1}, x)g(-G_1, \ldots, -G_{n-1}, -x)) - \Lambda(x)\Gamma(-x) \qquad (2.6)$$
   où $\Lambda(x) = \mathbb{E}(f(G_1, \ldots, G_{n-1}, x))$ et $\Gamma(x) = \mathbb{E}(g(-G_1, \ldots, -G_{n-1}, x))$?

   (b) Que peut-on dire des fonctions $\Lambda(x)$ et $\Gamma(x)$? En déduire le signe de
   $$\mathbb{E}(\Lambda(G_n)\Gamma(-G_n)) - \mathbb{E}(f(G_1, \ldots, G_{n-1}, G_n))\mathbb{E}(g(-G_1, \ldots, -G_{n-1}, -G_n)).$$

   (c) En intégrant l'inégalité (2.6) contre une densité bien choisie, vérifier
   $$\text{Cov}\ (f(G_1, \ldots, G_n), g(-G_1, \ldots, -G_n)) \leq 0.$$

   (d) Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ monotone en chacune de ses variables et bornée,
   $$\text{Cov}\ (f(G_1, \ldots, G_n), f(-G_1, \ldots, -G_n)) \leq 0.$$
   (*Indication :* on pourra remarquer que si $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, le vecteur $(\varepsilon_1 G_1, \ldots, \varepsilon_n G_n)$ a même loi que $(G_1, \ldots, G_n)$.)
   Qu'indique ce résultat pour l'estimation de $\mathbb{E}(f(G_1, \ldots, G_n))$ par la méthode de Monte-Carlo?

4. On se place maintenant dans le modèle de Black-Scholes

$$S_t(W) = S_0 e^{\sigma W_t + (r - \sigma^2/2)t}$$

où $S_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard. On fixe une maturité $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de payoff monotone, continue et bornée. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Delta t = T/N$ et $t_k = kT/N = k\Delta t,\ k \in \{0, \ldots, N\}$.

   (a) Quel est le signe de Cov $(f(S_T(W)), f(S_T(-W)))$?

   (b) On note $M_T^N(W) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_{t_k}(W)$.

      i. Donner, en la justifiant, la limite presque sûre de $M_T^N(W)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

      ii. Montrer que

$$M_T^N(W) = \frac{S_0}{N}\ \varphi_{N-1}\left(\frac{W_{t_1}}{\sqrt{\Delta t}}, \frac{W_{t_2} - W_{t_1}}{\sqrt{\Delta t}}, \ldots, \frac{W_{t_{N-1}} - W_{t_{N-2}}}{\sqrt{\Delta t}}\right),$$

      où pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_n :\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \to \sum_{k=0}^{n} e^{\sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{j=1}^{k} z_j + k(r - \sigma^2/2)\Delta t}.$$

      iii. En déduire le signe de Cov $(f(M_T^N(W)), f(M_T^N(-W)))$.

      iv. Conclure que Cov $\left(f\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t(W)dt\right), f\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t(-W)dt\right)\right) \leq 0$.

   (c) Montrer de même que Cov $\left(f\left(\max_{t \in [0,T]} S_t(W)\right), f\left(\max_{t \in [0,T]} S_t(-W)\right)\right) \leq 0$.

5. On considère $W, T, N, \Delta t, t_k, f$ comme à la question précédente et on s'intéresse à l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t = dW_t + b(X_t)dt \\ dY_t = -dW_t + b(Y_t)dt \\ X_0 = Y_0 = x, \end{cases} \tag{2.7}$$

où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne **croissante**.

   (a) Dans le cas particulier $b(y) = by$, vérifier que Var $(X_T + Y_T) = 0$.

   (b) On note $(\bar{X}_{t_k}^N, \bar{Y}_{t_k}^N)_{0 \leq k \leq N}$ le schéma d'Euler à N pas de temps appliqué à (2.7). Pour quelle valeur de α a-t-on $\|(X_T, Y_T) - (\bar{X}_T^N, \bar{Y}_T^N)\|_2 \leq C/N^\alpha$? Quelle régularité de la fonction b assure que $\alpha = 1$ convient?

   (c) Montrer que $\mathbb{E}(f(\bar{X}_T^N)) = \mathbb{E}(f(\bar{Y}_T^N))$ et que Cov $(f(\bar{X}_T^N), f(\bar{Y}_T^N)) \leq 0$. On pourra exprimer $\bar{X}_T^N$ et $\bar{Y}_T^N$ à l'aide des fonctions φ_n définies par

$$\begin{cases} \varphi_1(z_1) = \varphi(x, z_1) \text{ et pour } n \geq 2,\ \varphi_n(z_1, \ldots, z_n) = \varphi(\varphi_{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}), z_n). \\ \text{où } \varphi(y, z) = y + z\sqrt{\Delta t} + b(y)\Delta t. \end{cases}$$

   (d) Conclure que $\mathbb{E}(f(X_T)) = \mathbb{E}(f(Y_T))$ et que Cov $(f(X_T), f(Y_T)) \leq 0$.

Chapter 3

Simulation de processus comportant des sauts

La volonté de mieux rendre compte des phénomènes observés sur les marchés a motivé l'introduction de sauts dans les modèles d'évolution d'actifs financiers. Sauf exception, cela conduit à un marché incomplet. Les modèles considérés sont de deux types :

- équations différentielles stochastiques avec sauts, qui comportent, en plus des termes de diffusion et de dérive usuels, un terme de sauts dirigé le plus souvent par un processus de Poisson.
- exponentielles de processus de Lévy : le sous-jacent évolue comme l'exponentielle d'un Processus à Accroissements Indépendants et Stationnaires. Le cas particulier du modèle de Black-Scholes se retrouve lorsque les trajectoires de ce PAIS sont continues.

3.1 Diffusions avec sauts

Nous nous intéresserons tout d'abord à la simulation du processus le plus simple qui comporte des sauts : le processus de Poisson. Puis nous verrons comment simuler le modèle de Merton qui est construit à partir d'un mouvement brownien et d'un processus de Poisson indépendants. Enfin, nous traiterons le cas des équations différentielles stochastiques avec sauts.

3.1.1 Le processus de Poisson

Définition 3.1.1. *On appelle processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, un processus $(N_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et à trajectoires continues à droite t.q. pour tous temps $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, les variables aléatoires $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indépendantes et distribuées suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda t_1, \lambda(t_2 - t_1), ..., \lambda(t_n - t_{n-1})$.*

Le processus de Poisson est un PAIS (également appelé processus de Lévy) à trajectoires discontinues. La proposition suivante décrit la structure de ses sauts.

Proposition 3.1.2. *Soit $(\tau_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre λ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$. Alors le processus de comptage $(N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n\leq t\}})_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ.*
Inversement, si $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ et si $T_i = \inf\{t \geq 0 : N_t \geq i\}$ pour $i \geq 1$, alors les variables aléatoires $(T_i - T_{i-1})_{i\geq 1}$ (où par convention $T_0 = 0$) sont i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre λ et pour $i \geq 1$, $N_{T_i} = i$.

Démonstration : Pour la première assertion, nous allons nous contenter de raisonner avec deux temps $0 \leq t_1 \leq t_2$. Le cas d'un nombre fini de temps s'obtient par une généralisation aisée. Pour $k, l \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ bornée, en commençant par intégrer en s_{k+l+1} pour la quatrième égalité puis en effectuant le changement de variables de jacobien 1 $r_1 = s_1, r_2 = s_1 + s_2, \ldots, r_{k+l} = s_1 + \ldots + s_{k+l}$ pour la cinquième, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(f(\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_{k+l})1_{\{\bar{N}_{t_1}=k, \bar{N}_{t_2}-\bar{N}_{t_1}=l\}}) = \mathbb{E}(f(\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_{k+l})1_{\{\bar{N}_{t_1}=k, \bar{N}_{t_2}=k+l\}}) \\
&= \mathbb{E}\left(f(\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_{k+l})1_{\{T_k\leq t_1<T_{k+1}, T_{k+l}\leq t_2<T_{k+l+1}\}}\right) \\
&= \int_{\substack{0\leq s_1+\ldots+s_k\leq t_1\leq s_1+\ldots+s_{k+1} \\ s_1+\ldots+s_{k+l}\leq t_2}} f(s_1, s_1+s_2, \ldots, s_1+\ldots+s_{k+l}) \\
&\qquad \left(\int_{t_2-(s_1+\ldots+s_{k+l})}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s_{k+l+1}} ds_{k+l+1}\right) \lambda^{k+l} e^{-\lambda(s_1+\ldots+s_{k+l})} \prod_{j=1}^{k+l} 1_{\{s_j\geq 0\}} ds_j \\
&= e^{-\lambda t_2}\lambda^{k+l} \int_{\substack{0\leq s_1+\ldots+s_k\leq t_1\leq s_1+\ldots+s_{k+1} \\ s_1+\ldots+s_{k+l}\leq t_2}} f(s_1, s_1+s_2, \ldots, s_1+\ldots+s_{k+l}) \prod_{j=1}^{k+l} 1_{\{s_j\geq 0\}} ds_j \\
&= e^{-\lambda t_2}\lambda^{k+l} \int f(r_1, \ldots, r_{k+l})1_{\{0\leq r_1\leq r_2\leq\ldots\leq r_k\leq t_1\}}1_{\{t_1<r_{k+1}\leq r_{k+2}\leq\ldots\leq r_{k+l}\leq t_2\}} dr_1 \ldots dr_{k+l}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Pour le choix $f \equiv 1$, on conclut que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{t_1} = k, N_{t_2} - N_{t_1} = l) &= e^{-\lambda t_2}\lambda^{k+l} \left(\int_{0\leq r_1\leq\ldots\leq r_k\leq t_1} \prod_{j=1}^{k} dr_j\right)\left(\int_{t_1\leq r_{k+1}\leq\ldots\leq r_{k+l}\leq t_2} \prod_{j=k+1}^{k+l} dr_j\right) \\
&= e^{-\lambda t_2}\lambda^{k+l}\frac{t_1^k}{k!} \times \frac{(t_2-t_1)^l}{l!} = e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^k}{k!} \times e^{-\lambda(t_2-t_1)}\frac{(\lambda(t_2-t_1))^l}{l!}.
\end{aligned}$$

Pour la réciproque, commençons par remarquer que pour $0 \leq s \leq t$, comme $N_t - N_s$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$, $\mathbb{P}(N_t \geq N_s) = 1$. On en déduit que $\mathbb{P}(\forall s \leq t \in \mathbb{Q}_+, N_t \geq N_s) = 1$ puis avec la continuité à droite des trajectoires que $\mathbb{P}(\forall s \leq t \in \mathbb{R}_+, N_t \geq N_s) = 1$. I ntroduisons la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ des temps de sauts du processus $(N_t)_{t\geq 0}$ définie par récurrence par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \inf\{t > S_{n-1} : N_t > N_{t^-}\} \text{ où } S_0 = 0 \text{ et } N_{t^-} = \lim_{s\to t^-} N_s.$$

Pour $t \geq 0$, on a $N_t = \sum_{n\geq 1} \nu_n 1_{\{S_n\leq t\}}$ où $\nu_n : \Omega \to \mathbb{N}^*$ désigne la taille a priori aléatoire du saut de l'instant S_n.
Comme $\mathbb{P}(S_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$, S_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ. La propriété de Markov forte du PAIS $(N_t)_{t\geq 0}$ au temps d'arrêt S_1 assure que $(N_{S_1+t} - N_{S_1})_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ indépendant de S_1. Donc, d'après ce qui

précède, l'instant de premier saut $S_2 - S_1$ de ce processus est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ indépendante de S_1. Plus généralement les variables $(S_n - S_{n-1})_{n\geq 1}$ sont i.i.d. suivant cette loi.
Pour $t \geq 0$, comme $N_t = \sum_{n\geq 1} \nu_n 1_{\{S_n \leq t\}} \geq \sum_{n\geq 1} 1_{\{S_n \leq t\}}$ où les variables aléatoires N_t et $\sum_{n\geq 1} 1_{\{S_n\leq t\}}$ suivent toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λt, $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{\{S_n\leq t\}}$.
□

On en déduit les deux possibilités suivantes pour simuler le processus de Poisson à partir d'une suite $(U_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$:

-génération des temps de sauts : $(-\frac{1}{\lambda}\ln(U_i))_{i\geq 1}$ est une suite de variables i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre λ et $(\sum_{n\geq 1} 1_{\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \ln(U_i)\leq t\}})_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ. Notons que

$$\sum_{n\geq 1} 1_{\{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \ln(U_i)\leq t\}} = \min\{n \in \mathbb{N} : \prod_{i=1}^{n+1} U_i \leq e^{-\lambda t}\}.$$

-simulation à des instants déterministes : pour générer le processus à des temps fixes $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, on utilise la définition qui assure que les variables aléatoires $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indépendantes et distribuées suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda t_1, \lambda(t_2 - t_1), ..., \lambda(t_n - t_{n-1})$.
Notons que d'après l'algorithme précédent, pour $\theta > 0$, $\min\{n \in \mathbb{N} : \prod_{i=1}^{n+1} U_i \leq e^{-\theta}\}$ suit la loi de Poisson de paramètre θ.

On peut généraliser la définition du processus de Poisson en relachant l'hypothèse de stationnarité des accroissements. Le paramètre réel est remplacé par une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 3.1.3. *Soit $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable telle que pour tout $t > 0$, $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds < +\infty$. On appelle processus de Poisson d'intensité $\lambda(t)$ un processus $(N_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et à trajectoires continues à droite t.q. pour tous temps $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, les variables aléatoires $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indépendantes et distribuées suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\Lambda(t_1), \Lambda(t_2) - \Lambda(t_1), ..., \Lambda(t_n) - \Lambda(t_{n-1})$.*

La simulation à des instants déterministes n'est pas plus compliquée que dans le cas homogène où l'intensité est constante. En revanche, la simulation des temps de sauts repose sur la proposition suivante :

Proposition 3.1.4. *Soit $(U_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Si la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est définie par*

$$\forall n \geq 1,\ T_n = \inf\left\{t \geq 0 : \Lambda(t) = -\sum_{i=1}^n \ln(U_i)\right\} \quad \textit{(convention } \inf \emptyset = +\infty\textit{)},$$

alors $(N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n\leq t\}})_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda(t)$.

Si l'intensité $\lambda(t)$ est constante égale à λ, alors $\Lambda(t) = \lambda t$ et $T_n = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \ln(U_i)$, si bien que l'on retrouve la première assertion de la proposition 3.1.2.

Démonstration : Par continuité de Λ, pour $n \geq 1$, si $T_n < +\infty$ alors $\Lambda(T_n) = -\sum_{i=1}^n \ln(U_i)$. Par croissance de Λ, on en déduit que pour $t \geq 0$, $T_n \leq t$ implique $-\sum_{i=1}^n \ln(U_i) \leq \Lambda(t)$. Inversement, si $-\sum_{i=1}^n \ln(U_i) \leq \Lambda(t)$, la définition de T_n entraîne que $T_n \leq t$. Ainsi $\{T_n \leq t\} = \{-\sum_{i=1}^n \ln(U_i) \leq \Lambda(t)\}$.
D'après la première assertion de la proposition 3.1.2, le processus $(N^1_s = \sum_{n\geq 1} 1_{\{-\sum_{i=1}^n \ln(U_i)\leq s\}})_{s\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre 1. Comme pour tout $t \geq 0$, $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{\{-\sum_{i=1}^n \ln(U_i)\leq \Lambda(t)\}} = N^1_{\Lambda(t)}$, on conclut facilement. □

Dans le cas inhomogène où $\lambda(t)$ est une fonction majorée par $\bar{\lambda} < +\infty$, on peut également utiliser la technique de simulation **de sauts fictifs** qui repose sur le résultat suivant.

Proposition 3.1.5. *Soit $\lambda : \mathbb{R}_+ \to [0, \bar{\lambda}]$ et $(\bar{T}_j)_{j\geq 1}$ la suite des temps de sauts successifs d'un processus de Poisson $(\bar{N}_t)_{t\geq 0}$ de paramètre $\bar{\lambda}$ indépendant d'une suite $(U_j)_{j\geq 1}$ de variables i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Si on définit par récurrence*

$$T_0 = 0 \text{ et pour } n \geq 1,\ T_n = \min\left\{\bar{T}_j > T_{n-1} : U_j \leq \frac{\lambda(\bar{T}_j)}{\bar{\lambda}}\right\},$$

alors $(N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n\leq t\}})_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda(t)$.

On rejette chacun des temps de sauts du processus de Poisson dont le paramètre $\bar{\lambda}$ majore l'intensité $\lambda(t)$ avec une probabilité égale au rapport $\lambda(.)/\bar{\lambda}$ calculé au temps de saut. Les sauts rejetés sont les sauts fictifs dont la méthode tire son nom.
Démonstration : On a $N_t = \sum_{j=1}^{\bar{N}_t} 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(\bar{T}_j)}{\bar{\lambda}}\}}$. Pour $0 < t_1 < t_2$ et $n, m \in \mathbb{N}$, en utilisant l'indépendance de la suite $(U_j)_{j\geq 1}$ et de $\bar{N}$ pour la troisième égalité, puis la proposition 3.1.2 et (3.1) pour la quatrième, on obtient

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = n, N_{t_2} - N_{t_1} = m) = \sum_{k\geq n, l\geq m} \mathbb{P}(N_{t_1} = n, \bar{N}_{t_1} = k, N_{t_2} - N_{t_1} = m, \bar{N}_{t_2} - \bar{N}_{t_1} = l)$$

$$= \sum_{k\geq n, l\geq m} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(\bar{T}_j)}{\bar{\lambda}}\}} = n, \bar{N}_{t_1} = k, \sum_{j=k+1}^{k+l} 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(\bar{T}_j)}{\bar{\lambda}}\}} = m, \bar{N}_{t_2} - \bar{N}_{t_1} = l\right)$$

$$= \sum_{k\geq n, l\geq m} \int_{[0,1]^{k+l}} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k 1_{\{u_j \leq \frac{\lambda(\bar{T}_j)}{\bar{\lambda}}\}} = n, \bar{N}_{t_1} = k, \sum_{j=k+1}^{k+l} 1_{\{u_j \leq \frac{\lambda(\bar{T}_j)}{\bar{\lambda}}\}} = m, \bar{N}_{t_2} - \bar{N}_{t_1} = l\right) du_1 \dots du_{k+l}$$

$$= e^{-\bar{\lambda}t_2} \sum_{k\geq n, l\geq m} \bar{\lambda}^{k+l} \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(r_j)}{\bar{\lambda}}\}} = n\right) 1_{\{0\leq r_1\leq \dots \leq r_k \leq t_1\}} dr_1 \dots dr_k$$
$$\int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{P}\left(\sum_{j=k+1}^{k+l} 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(r_j)}{\bar{\lambda}}\}} = n\right) 1_{\{t_1 < r_{k+1}\leq \dots \leq r_{k+l} \leq t_2\}} dr_{k+1} \dots dr_{k+l}. \quad (3.2)$$

Comme $(r_1, \dots, r_k) \mapsto \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(r_j)}{\bar{\lambda}}\}} = n\right)$ est une fonction symétrique, en notant

$\mathcal{S}_k$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, k\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(r_j)}{\bar{\lambda}}\}} = n\right) 1_{\{0\leq r_1 \leq \dots \leq r_k \leq t_1\}} dr_1 \dots dr_k \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(r_j)}{\bar{\lambda}}\}} = n\right) 1_{\{0\leq r_{\sigma(1)} \leq \dots \leq r_{\sigma(k)} \leq t_1\}} dr_1 \dots dr_k \\
&= \frac{1}{k!} \int_{[0,t_1]^k} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(r_j)}{\bar{\lambda}}\}} = n\right) dr_1 \dots dr_k = \frac{t_1^k}{k!} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(R_j)}{\bar{\lambda}}\}} = n\right)
\end{aligned}$$

où les variables aléatoires $(R_j)_{1\leq j\leq k}$ sont i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0, t_1]$ et indépendantes des U_j. La variable aléatoire $\sum_{j=1}^k 1_{\{U_j \leq \frac{\lambda(R_j)}{\bar{\lambda}}\}}$ suit la loi binomiale de paramètres k et

$$\mathbb{P}\left(U_1 \leq \frac{\lambda(R_1)}{\bar{\lambda}}\right) = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \int_0^{\frac{\lambda(r)}{\bar{\lambda}}} dudr = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{\lambda(r)}{\bar{\lambda}} dr = \frac{\Lambda(t_1)}{\bar{\lambda} t_1}.$$

On en déduit que la première intégrale au membre de droite de (3.2) est égale à

$$\frac{1}{\bar{\lambda}^k k!} \binom{k}{n} \Lambda(t_1)^n (\bar{\lambda} t_1 - \Lambda(t_1))^{k-n} = \frac{1}{\bar{\lambda}^k n!(k-n)!} \Lambda(t_1)^n (\bar{\lambda} t_1 - \Lambda(t_1))^{k-n}.$$

La seconde intégrale se calcule de manière analogue et on conclut que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_{t_1} = n, N_{t_2} - N_{t_1} = m) \\
&= e^{-\bar{\lambda} t_2} \frac{\Lambda(t_1)^n (\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))^m}{n!m!} \sum_{k\geq n} \frac{(\bar{\lambda} t_1 - \Lambda(t_1))^{k-n}}{(k-n)!} \sum_{l\geq m} \frac{(\bar{\lambda}(t_2 - t_1) - \Lambda(t_2) + \Lambda(t_1))^{l-m}}{(l-m)!} \\
&= e^{-\Lambda(t_1)} \frac{\Lambda(t_1)^n}{n!} \times e^{-(\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))} \frac{(\Lambda(t_2) - \Lambda(t_1))^m}{m!}.
\end{aligned}$$

□

3.1.2 Le modèle de Merton

Le modèle de Merton s'écrit

$$X_t^y = y e^{\sigma W_t + \mu t} \prod_{j=1}^{N_t} Y_j \tag{3.3}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $(Y_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telles que $\mathbb{P}(Y_1 > 0) = 1$. On suppose également $(W_t)_{t\geq 0}$, $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_j)_{j\geq 1}$ indépendants.

Exemple 3.1.6. Pour la loi commune des Y_j,

- le choix $\mathbb{P}(Y_j = a) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_j = b)$ où $0 < a < 1 < b$ permet de modéliser à la fois des sauts à la baisse $\{Y_j = a\}$ et des sauts à la hausse $\{Y_j = b\}$,

- le choix d'une loi lognormale assure que la loi conditionnelle de X_t^y sachant $N_t = n$ est lognormale.

Pour simuler le modèle de Merton, on peut utiliser

- la simulation des temps de sauts : on génère les temps de sauts successifs $(T_n)_{n\geq 1}$ du processus de Poisson et les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ et, de façon indépendante, une suite $(G_n)_{n\geq 1}$ de gaussiennes centrées réduites indépendantes; alors on simule le processus aux temps de sauts en posant

$$X_0^y = y,\ T_0 = 0 \text{ et pour } n \geq 1, X_{T_n}^y = X_{T_{n-1}}^y Y_n e^{\sigma G_n \sqrt{T_n - T_{n-1}} + \mu(T_n - T_{n-1})}.$$

- la simulation à des instants déterministes : d'après (3.3), pour simuler X_t^y, il suffit de générer (N_t, W_t) puis N_t variables $Y_1, \ldots, Y_{N_t}$ indépendantes suivant la loi qui donne les amplitudes de sauts.

Pour $t \geq 0$, on pose $X_{t^-}^y = \lim_{s\to t^-} X_s^y$. Entre deux temps de sauts T_{n-1} et T_n successifs, le processus de Merton (3.3) évolue suivant l'EDS de Black-Scholes $dX_t^y = \sigma X_t^y dW_t + (\mu + \frac{\sigma^2}{2})X_t^y dt$ tandis qu'en T_n, $X_{T_n}^y = X_{T_n^-}^y Y_n$ égalité qui se récrit $X_{T_n}^y - X_{T_n^-}^y = X_{T_n^-}^y (Y_n - 1)$. On en déduit que ce processus est solution de l'équation différentielle stochastique avec sauts :

$$dX_t^y = \sigma X_t^y dW_t + (\mu + \sigma^2/2)X_t^y dt + X_{t^-}^y (Y_{N_t} - 1)dN_t.$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la simulation d'EDS avec sauts plus générales et dont la solution n'a pas d'expression explicite.

3.1.3 Équation différentielles stochastiques avec sauts

Pour $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $c : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on s'intéresse à l'EDS avec sauts en dimension n

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt + c(t, X_{t^-}, Y_{N_t})dN_t,\ X_0 = y$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$, $(N_t)_{t\geq 0}$ processus de Poisson de paramètre λ et $(Y_i)_{i\geq 1}$ suite de vecteurs i.i.d. à valeurs $\mathbb{R}^q$ sont indépendants. En conditionnant par la partie sauts $((N_t)_{t\geq 0}, (Y_i)_{i\geq 1})$, on vérifie facilement que si σ et b satisfont l'hypothèse (Lip) du théorème 1.1.2, alors cette EDS admet une unique solution.

Remarque 3.1.7. Ce cadre englobe le cas d'une intensité de sauts $\gamma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to [0, \lambda]$ dépendant de l'état courant mais bornée en posant $Y_i = (Z_i, U_i)$ et $c(t, x, z, u) = 1_{\{u \leq \frac{\gamma(t,x)}{\lambda}\}} f(x, z)$ avec Z_i à valeurs $\mathbb{R}^{q-1}$ et U_i uniforme sur $[0, 1]$.

Pour discrétiser ce processus jusqu'à l'horizon T, on peut utiliser une grille croissante d'instants qui combine les temps déterministes $t_k = \frac{kT}{n}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$ et les temps de sauts $T_1, \ldots, T_{N_T}$ du processus de Poisson avant T. On initialise le schéma en posant $\bar{X}_0 = y$. Puis, pour passer d'un instant de discrétisation s_l à l'instant suivant s_{l+1},

- on commence par utiliser un schéma standard pour la partie EDS sans sauts, ce qui donne dans le cas du schéma d'Euler,

$$\bar{X}_{s_{l+1}^-} = \bar{X}_{s_l} + \sigma(s_l, \bar{X}_{s_l})(W_{s_{l+1}} - W_{s_l}) + b(s_l, \bar{X}_{s_l})(s_{l+1} - s_l).$$

- si $s_{l+1} \in \{T_1, \ldots, T_{N_T}\}$ i.e. s_{l+1} est un temps de saut, on fait sauter le processus discrétisé suivant

$$\bar{X}_{s_{l+1}} = \bar{X}_{s_{l+1}^-} + c(s_{l+1}, \bar{X}_{s_{l+1}^-}, Y_{N_{s_{l+1}}}).$$

  Sinon, on pose $\bar{X}_{s_{l+1}} = \bar{X}_{s_{l+1}^-}$.

Sous de bonnes hypothèses de régularité sur les coefficients de l'EDS, on peut vérifier que l'ordre de convergence faible de ce schéma est égal à celui du schéma utilisé pour la partie EDS sans sauts.

3.2 Processus de Lévy

Le modèle de Black-Scholes s'écrit

$$\forall t \geq 0,\ X_t^y = ye^{Z_t} \tag{3.4}$$

où $Z_t = \sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t$ est un Processus à Accroissements Indépendants et Stationnaires continu. On peut montrer que tous les PAIS continus à valeurs réelles sont de la forme $\sigma W_t + \mu t$ où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard. Une généralisation naturelle de la modélisation consiste alors à prendre pour $(Z_t)_{t\geq 0}$ un PAIS (ou processus de Lévy) non nécessairement continu dans (3.4).

Définition 3.2.1. *On appelle PAIS ou également processus de Lévy un processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues à droite avec des limites à gauche tel que*

1. $Z_0 = 0$,
2. *pour tous temps $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, les accroissements $Z_{t_1}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$ sont indépendants,*
3. *pour $0 \leq s \leq t$, l'accroissement $Z_t - Z_s$ a même loi que Z_{t-s}.*

Exemple 3.2.2. Le mouvement brownien et le processus de Poisson de paramètre λ sont des processus de Lévy.

Si $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy, alors comme pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Z_1 = \sum_{k=1}^{n} (Z_{k/n} - Z_{(k-1)/n}) \text{ où les variables } (Z_{k/n} - Z_{(k-1)/n})_{1\leq k\leq n} \text{ sont i.i.d.,} \tag{3.5}$$

la variable aléatoire Z_1 est indéfiniment divisible au sens de la définition suivante.

Définition 3.2.3. *Une variable aléatoire réelle X et sa loi sont dites indéfiniment divisibles si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables i.i.d. $(X_k^n)_{1\leq k\leq n}$ telle que $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{k=1}^n X_k^n$.*

En fait, il existe une bijection entre lois indéfiniment divisibles et processus de Lévy :

Théorème 3.2.4. *Pour toute loi indéfiniment divisible, il existe un processus de Lévy $(Z_t)_{t\geq 0}$ unique en loi t.q. la variable Z_1 est distribuée suivant cette loi.*

Le résultat suivant, que nous ne démontrerons pas, donne la structure de la fonction caractéristique des variables aléatoires indéfiniment divisibles qui porte le nom de formule de Lévy-Kinchine.

Proposition 3.2.5. *Une variable aléatoire réelle X est indéfiniment divisible si et seulement si il existe un unique triplet (σ, μ, ν) avec $\sigma \geq 0, \mu \in \mathbb{R}$ et ν mesure sur la droite réelle vérifiant $\nu(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}}(h^2 \wedge 1)\nu(dh) < +\infty$ appelée mesure de Lévy, tel que*

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(e^{iuX}\right) = e^{\psi(u)} \text{ où } \psi(u) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} + iu\mu + \int_{\mathbb{R}}(e^{iuh} - 1 - iuh1_{\{|h|\leq 1\}})\nu(dh).$$

Ainsi, pour tout processus de Lévy $(Z_t)_{t\geq 0}$, il existe un triplet (σ, μ, ν) tel que $\mathbb{E}\left(e^{iuZ_1}\right) = e^{\psi(u)}$ avec ψ définie dans la proposition. Avec (3.5), on en déduit facilement que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(e^{iuZ_{1/n}}\right) = e^{\frac{\psi(u)}{n}}$ puis que pour tout $t \in \mathbb{Q}_+$, $\mathbb{E}\left(e^{iuZ_t}\right) = e^{t\psi(u)}$. Comme la continuité à droite des trajectoires de $(Z_t)_{t\geq 0}$ entraîne par convergence dominée celle de $t \to \mathbb{E}\left(e^{iuZ_t}\right)$, on conclut que $\forall t \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(e^{iuZ_t}\right) = e^{t\psi(u)}$.
On en déduit que $(Z_t)_{t\geq 0}$ admet la décomposition $\forall t \geq 0,\ Z_t = \sigma W_t + \mu t + \bar{Z}_t$ où $(\bar{Z}_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de sauts purs indépendant de $(W_t)_{t\geq 0}$ tel que $\forall t \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{iu\bar{Z}_t}\right) = \exp\left(t\int_{\mathbb{R}}(e^{iuh} - 1 - iuh1_{\{|h|\leq 1\}})\nu(dh)\right)$. Lorsque la mesure de Lévy ν est non nulle et bornée au sens où $\lambda = \nu(\mathbb{R}) \in]0, +\infty[$, alors $m = \frac{\nu}{\lambda}$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Le processus $(\bar{Z}_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson composé avec dérive au sens où il existe un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ de paramètre λ ainsi qu'une suite indépendante $(\xi_i)_{i\geq 1}$ de variables i.i.d. suivant m tels que

$$\forall t \geq 0,\ \bar{Z}_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i - t\int_{[-1,1]} h\nu(dh).$$

En effet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\sum_{i=1}^{N_t}\xi_i - t\int_{[-1,1]}h\nu(dh)\right)}\right) &= e^{-t(\lambda + iu\int_{[-1,1]}h\nu(dh))}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{iuh}m(dh)\right)^n \\ &= e^{t\int_{\mathbb{R}}(e^{iuh}-1-iuh1_{\{|h|\leq 1\}})\nu(dh)}.\end{aligned}$$

Dans ce cas (3.4) s'écrit

$$X_t^y = ye^{\sigma W_t + \bar{\mu}t}\prod_{j=1}^{N_t} Y_j \text{ avec } Y_j = e^{\xi_j} \text{ et } \bar{\mu} = \mu - \int_{[-1,1]} h\nu(dh)$$

et on retrouve le modèle de Merton (3.3).
Pour sortir de ce modèle, il faut donc considérer le cas $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$ où $(\bar{Z}_t)_{t\geq 0}$ possède une infinité de sauts sur tout intervalle de temps de longueur non nulle.
Pour une étude détaillée des processus de Lévy, nous revoyons aux livres de Bertoin [5], Sato [45] et Applebaum [4].

3.2.1 Processus gamma et variance-gamma

Rappelons tout d'abord la définition et une technique de simulation de la loi gamma.

Définition 3.2.6. *Pour $a, \theta > 0$, on appelle loi gamma de paramètre (a, θ) et on note $\Gamma(a, \theta)$ la loi de densité $\frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} \theta^a e^{-\theta x} 1_{\{x>0\}}$ sur la droite réelle où $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ désigne la fonction gamma d'Euler.*

Propriétés :

1. La loi $\Gamma(1, \theta)$ est la loi exponentielle de paramètre θ.
2. Si $X \sim \Gamma(a, \theta)$ et $Y \sim \Gamma(b, \theta)$ sont indépendantes et $\lambda > 0$, $\lambda X \sim \Gamma(a, \frac{\theta}{\lambda})$ et $X + Y \sim \Gamma(a + b, \theta)$.
3. Si $X \sim \Gamma(a, \theta)$ alors

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \forall v \geq 0,\ \mathbb{E}(e^{(iu-v)X}) = \left(\frac{\theta}{\theta + v - iu} \right)^a. \tag{3.6}$$

Les propriétés 1 et 2 sont à la base de la technique de simulation suivante.
Simulation d'une variable de loi $\Gamma(a, \theta)$ où $a, \theta > 0$: Soit $\lfloor a \rfloor$ la partie entière de a, $\alpha = a - \lfloor a \rfloor$ sa partie fractionnaire et $U_1, \ldots, U_{\lfloor a \rfloor}$ des variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes.
D'après la propriété 2, si $Y \sim \Gamma(\alpha, 1)$ (convention $Y = 0$ si $\alpha = 0$) est indépendante de $(U_1, \ldots, U_{\lfloor a \rfloor})$, la variable aléatoire $\frac{1}{\theta} \left(Y - \ln \left(\prod_{j=1}^{\lfloor a \rfloor} U_j \right) \right)$ où $\prod_{j=1}^0 = 1$ suit la loi $\Gamma(a, \theta)$.
Reste donc, pour $\alpha \in]0, 1[$, à savoir simuler $Y \sim \Gamma(\alpha, 1)$ de densité $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y} 1_{\{y>0\}} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[y^{\alpha-1} 1_{\{0<y\leq 1\}} + e^{-y} 1_{\{y>1\}} \right]$. On peut pour cela effectuer du rejet sous la densité $p(y) = \frac{e}{\alpha+e} \left[\alpha y^{\alpha-1} 1_{\{0<y\leq 1\}} \right] + \frac{\alpha}{\alpha+e} \left[e^{1-y} 1_{\{y>1\}} \right]$ de fonction de répartition

$$F(y) = \frac{e}{\alpha + e} \left[y^\alpha 1_{\{0<y\leq 1\}} + (1 + \alpha(e^{-1} - e^{-y})) 1_{\{y>1\}} \right].$$

Comme $F^{-1}(u) = \left(\frac{(\alpha+e)u}{e} \right)^{1/\alpha} 1_{\{u \leq \frac{e}{\alpha+e}\}} - \ln \left(\frac{(\alpha+e)(1-u)}{\alpha e} \right) 1_{\{u > \frac{e}{\alpha+e}\}}$, on peut facilement simuler suivant la densité p. L'espérance du nombre géométrique de propositions suivant la densité p nécessaires pour générer une variable de loi $\Gamma(\alpha, 1)$ est $\frac{\alpha+e}{\alpha e \Gamma(\alpha)}$. Son maximum sur l'intervalle $[0, 1]$ est d'environ 1.39.

Pour $a, \theta > 0$, d'après la propriété 2, la loi $\Gamma(a, \theta)$ est indéfiniment divisible. Donc d'après le théorème 3.2.4, il existe un processus de Lévy $(U_t)_{t\geq 0}$ appelé processus gamma de paramètre (a, θ) tel que $U_1 \sim \Gamma(a, \theta)$ et $\mathbb{E}\left(e^{iuU_t}\right) = \left(\mathbb{E}\left(e^{iuU_1}\right)\right)^t$, ce qui assure que $U_t \sim \Gamma(at, \theta)$ d'après (3.6). Comme les variables aléatoires gamma sont positives, ce processus est croissant. Cette propriété de monotonie n'étant pas satisfaisante pour modéliser le cours d'un actif financier, Madan, Carr et Chang [35] proposent plutôt d'utiliser dans (3.4) $Z_t = U_t - D_t$ où $(U_t)_{t\geq 0}$ et $(D_t)_{t\geq 0}$ sont des processus gamma indépendants de paramètres respectifs (a, θ) et (a, λ). Le lemme suivant explique pourquoi le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ porte le nom de processus variance gamma.

Lemme 3.2.7. *Le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ a même loi que $(B_{Y_t})_{t\geq 0}$ où $B_t = \sqrt{\frac{2a}{\theta\lambda}}\, W_t + \frac{(\lambda-\theta)a}{\lambda\theta} t$ avec $(W_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien standard indépendant de $(Y_t)_{t\geq 0}$ processus gamma de paramètre (a, a).*

Démonstration : Posons $\sigma = \sqrt{\frac{2a}{\theta\lambda}}$, $\mu = \frac{(\lambda-\theta)a}{\lambda\theta}$ et notons p_t la densité de Y_t pour $t > 0$. Pour $0 < t_1 < t_2$ et $u, v \in \mathbb{R}$, en utilisant l'indépendance de Y et B puis le caractère indépendant et stationnaire des accroissements de ces processus et la positivité de ceux de Y, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{i(uB_{Y_{t_1}}+v(B_{Y_{t_2}}-B_{Y_{t_1}}))}\right) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathbb{E}\left(e^{i(uB_\tau+v(B_{\tau+r}-B_\tau))}\right)p_{t_1}(\tau)p_{t_2-t_1}(r)d\tau dr\\ &= \int_0^{+\infty} e^{(iu\mu-\frac{\sigma^2u^2}{2})\tau}p_{t_1}(\tau)d\tau\int_0^{+\infty} e^{(iv\mu-\frac{\sigma^2v^2}{2})r}p_{t_2-t_1}(r)dr\\ &= \mathbb{E}\left(e^{iuB_{Y_{t_1}}}\right)\mathbb{E}\left(e^{ivB_{Y_{t_2-t_1}}}\right).\end{aligned}$$

Donc $(B_{Y_t})_{t\geq 0}$ est un PAIS et il suffit de vérifier que pour $t > 0$, Z_t et B_{Y_t} ont même loi pour conclure. Pour cela, on utilise la fonction caractéristique. Pour $u \in \mathbb{R}$, d'après le calcul qui précède puis (3.6) et la définition de (σ, μ),

$$\mathbb{E}(e^{iuB_{Y_t}}) = \mathbb{E}\left(e^{(iu\mu-\frac{\sigma^2u^2}{2})Y_t}\right) = \left(\frac{a}{a+\frac{\sigma^2u^2}{2}-iu\mu}\right)^{at} = \left(\frac{\theta\lambda}{\theta\lambda+i(\theta-\lambda)u+u^2}\right)^{at}.$$

D'autre part, d'après la définition de Z, l'indépendance de U et D puis (3.6),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{iuZ_t}) = \mathbb{E}(e^{iu(U_t-D_t)}) = \mathbb{E}(e^{iuU_t})\mathbb{E}(e^{-iuD_t}) &= \left(\frac{\theta}{\theta-iu}\right)^{at}\left(\frac{\lambda}{\lambda+iu}\right)^{at}\\ = \left(\frac{\theta\lambda}{\theta\lambda+i(\theta-\lambda)u+u^2}\right)^{at}.\end{aligned}$$

□

Au passage, nous avons vu que $Z_{t_2} - Z_{t_1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z_{t_2-t_1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sigma\sqrt{Y_{t_2-t_1}}G + \mu Y_{t_2-t_1}$ où G est une gaussienne centrée réduite indépendante de $(Y_t)_{t\geq 0}$. On peut utiliser cette remarque ou bien la définition $Z_t = U_t - D_t$ du processus variance gamma pour pouvoir simuler ses accroissements.

3.2.2 Processus Normal Inverse Gaussian

Définition 3.2.8. *Soit $\gamma \geq 0$ et $\delta > 0$. On appelle loi Inverse Gaussian de paramètre (γ, δ) et on note $IG(\gamma, \delta)$ la loi de densité*

$$\frac{\delta e^{\delta\gamma}}{\sqrt{2\pi}}x^{-3/2}e^{-\frac{1}{2}(\frac{\delta^2}{x}+\gamma^2x)}1_{\{x>0\}} = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}x^{-3/2}e^{-\frac{(\delta-\gamma x)^2}{2x}}1_{\{x>0\}}$$

sur la droite réelle.

On a l'interprétation probabiliste suivante pour cette loi.

Lemme 3.2.9. *Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.*
Alors $\tau_\delta = \inf\{t \geq 0 : W_t + \gamma t \geq \delta\}$ suit la loi $IG(\gamma, \delta)$.

Démonstration : On pose $B_t = W_t + \gamma t$. Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le théorème de Girsanov, sous $\tilde{\mathbb{P}}$ de densité $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = e^{-\gamma W_n - \frac{\gamma^2}{2}n}$, $(B_t)_{t\leq n}$ est un mouvement brownien. En outre, $(e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t})_{t\leq n}$ et $(e^{(\alpha+\gamma)B_t - \frac{(\alpha+\gamma)^2}{2}t})_{t\leq n}$ sont des $\tilde{\mathbb{P}}$ martingales exponentielles. Comme $\frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}} = e^{\gamma B_n - \frac{\gamma^2}{2}n}$, on a

$$\mathbb{E}\left(e^{\alpha B_{\tau_\delta\wedge n} - \frac{\alpha^2+2\alpha\gamma}{2}\tau_\delta\wedge n}\right) = \tilde{\mathbb{E}}\left(e^{\alpha B_{\tau_\delta\wedge n} - \frac{\alpha^2+2\alpha\gamma}{2}\tau_\delta\wedge n}e^{\gamma B_n - \frac{\gamma^2}{2}n}\right) = \tilde{\mathbb{E}}\left(e^{(\alpha+\gamma)B_{\tau_\delta\wedge n} - \frac{(\alpha+\gamma)^2}{2}\tau_\delta\wedge n}\right) = 1.$$

Lorsque n tend vers l'infini, la suite de variables aléatoires $\left(e^{\alpha B_{\tau_\delta\wedge n} - \frac{\alpha^2+2\alpha\gamma}{2}\tau_\delta\wedge n}\right)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $[0, e^{\alpha\delta}]$ converge presque sûrement vers $e^{\alpha\delta - \frac{\alpha^2+2\alpha\gamma}{2}\tau_\delta}$. Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\alpha^2+2\alpha\gamma}{2}\tau_\delta}\right) = e^{-\alpha\delta}.$$

Notons qu'en prenant la limite pour $\alpha \to 0^+$, on obtient par convergence monotone que $\mathbb{P}(\tau_\delta < +\infty) = 1$.
Pour $\lambda \geq 0$, on vérifie facilement que $-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2\lambda}$ est l'unique racine positive de l'équation du second degré $\lambda = \frac{\alpha^2+2\alpha\gamma}{2}$ en α. Ainsi la transformée de Laplace de τ_δ est

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda\tau_\delta}\right) = e^{(\gamma - \sqrt{\gamma^2+2\lambda})\delta}.$$

On conclut en remarquant que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} IG(\gamma,\delta)(x)dx = e^{\delta\gamma}e^{-\delta\sqrt{\gamma^2+2\lambda}}\int_0^{+\infty} IG(\sqrt{\gamma^2+2\lambda},\delta)(x)dx = e^{(\gamma-\sqrt{\gamma^2+2\lambda})\delta}. \tag{3.7}$$

□

D'après la propriété de Markov forte pour le mouvement brownien avec dérive B_t, pour $\delta, \delta' > 0$, la variable aléatoire $\tau_{\delta+\delta'} - \tau_\delta$ est indépendante de τ_δ et a même loi que $\tau_{\delta'}$. Donc si $X \sim IG(\gamma,\delta)$ et $Y \sim IG(\gamma,\delta')$ sont indépendantes, alors $(X,Y) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\tau_\delta, \tau_{\delta+\delta'} - \tau_\delta)$ ce qui assure que $X + Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tau_{\delta+\delta'} \sim IG(\gamma, \delta+\delta')$. Cette propriété qui peut également se lire sur la transformée de Laplace (3.7), assure que la loi $IG(\gamma,\delta)$ est indéfiniment divisible. D'après le théorème 3.2.4, il existe un processus de Lévy $(Y_t)_{t\geq 0}$ appelé processus Inverse Gaussian de paramètre (γ,δ) tel que $Y_1 \sim IG(\gamma,\delta)$ et que $\mathbb{E}(e^{-\lambda Y_t}) = \mathbb{E}(e^{-\lambda Y_1})^t$, ce qui avec (3.7) assure que $Y_t \sim IG(\gamma, \delta t)$. Ce processus étant croissant, Barndorff-Nielsen [8] propose plutôt d'utiliser dans (3.4) $Z_t = B_{Y_t}$ où $B_t = \alpha + W_t + \mu t$ avec $(W_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien indépendant de $(Y_t)_{t\geq 0}$ et $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$.
En reprenant la preuve du lemme 3.2.7, on vérifie que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est alors un processus de Lévy tel que $Z_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \alpha + \sqrt{Y_t}G + \mu Y_t$ où G est une gaussienne centrée réduite indépendante de $(Y_t)_{t\geq 0}$. Il suffit de savoir simuler suivant les lois IG pour pouvoir générer les accroissements de ce processus. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.2.10. *Soient $\delta > 0$, $X \sim \chi^2(1) = \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}1_{\{x>0\}}$ et U uniformément répartie sur $[0,1]$ indépendantes.*

Alors $\frac{\delta^2}{X} \sim IG(0,\delta)$ *et lorque* $\gamma > 0$,

$$si\ Y_\pm = \frac{2\gamma\delta + X \pm \sqrt{4\gamma\delta X + X^2}}{\gamma^2},\ alors\ Y = 1_{\{U \leq \frac{\delta}{\delta+\gamma Y_-}\}} Y_- + 1_{\{U > \frac{\delta}{\delta+\gamma Y_-}\}} Y_+ \sim IG(\gamma,\delta).$$

Notons que si $G^2 \sim \mathcal{N}_1(0,1)$, $G^2 \sim \chi^2(1)$, ce qui, avec la méthode polaire de simulation des gaussiennes centrées réduites, permet de simuler facilement suivant la loi $\chi^2(1)$.

Démonstration : Dans le cas $\gamma > 0$, la clé du résultat consiste à remarquer que si $Y \sim IG(\gamma,\delta)$, $Z = \frac{(\gamma Y-\delta)^2}{Y} \sim \chi^2(1)$.
La fonction $f(y) = \frac{(\gamma y-\delta)^2}{y}$ de dérivée $f'(y) = \frac{(\gamma y+\delta)(\gamma y-\delta)}{y^2}$ décroit de $+\infty$ à 0 sur $]0, \frac{\delta}{\gamma}[$ et croit de 0 à $+\infty$ sur $]\frac{\delta}{\gamma}, +\infty[$. Pour $z > 0$, l'équation $z = f(y)$ se récrit $y^2 - \frac{(2\gamma\delta+z)}{\gamma^2} y + \frac{\delta^2}{\gamma^2} = 0$. Le discriminant est $\Delta = \frac{4\delta\gamma z+z^2}{\gamma^4}$ et elle admet deux racines $y_\pm = \frac{2\gamma\delta+z\pm\sqrt{4\delta\gamma z+z^2}}{2\gamma^2}$ avec $y_+ > \frac{\delta}{\gamma}$ et $y_- < \frac{\delta}{\gamma}$. Enfin $f'(y_-) = -\frac{(\gamma y_-+\delta)|\gamma y_- - \delta|}{y_-^2} = -(\gamma y_- + \delta) y_-^{-3/2}\sqrt{z}$ et $f'(y_+) = (\gamma y_+ + \delta) y_+^{-3/2}\sqrt{z}$. Donc pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(Z)) &= \int_0^{+\infty} \varphi(z) \left(-\frac{IG(\gamma,\delta)}{f'}(y_-) + \frac{IG(\gamma,\delta)}{f'}(y_+) \right) dz \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(z) \left(\frac{1}{\gamma y_- + \delta} + \frac{1}{\gamma y_+ + \delta} \right) \frac{\delta}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z/2} dz.
\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{1}{\gamma y_- + \delta} + \frac{1}{\gamma y_+ + \delta} = \frac{\gamma(y_- + y_+) + 2\delta}{\gamma^2 y_- y_+ + \delta\gamma(y_- + y_+) + \delta^2} = \frac{\frac{2\gamma\delta+z}{\gamma} + 2\delta}{\delta^2 + \delta\frac{2\gamma\delta+z}{\gamma} + \delta^2} = \frac{1}{\delta},$$

on conclut que $\mathbb{E}(\varphi(Z)) = \int_0^{+\infty} \varphi(z) e^{-z/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi z}}$. En reprenant les calculs en marche arrière, on voit qu'il suffit de prendre la racine Y_- avec probabilité $\frac{\delta}{\delta+Y_-} = \frac{(\delta+Y_-)^{-1}}{(\delta+Y_-)^{-1}+(\delta+Y_+)^{-1}}$ et la racine Y_+ avec probabilité complémentaire pour obtenir une variable aléatoire de loi $IG(\gamma,\delta)$ à partir de $X \sim \chi^2(1)$.

Lorsque $\gamma \to 0^+$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{4\gamma\delta X + X^2} = X\sqrt{1 + \frac{4\gamma\delta}{X}} &= X \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4\gamma\delta}{X}\right) - \frac{1}{16}\left(\frac{4\gamma\delta}{X}\right)^2 \right) + o(\gamma^2) \\
&= X + 2\gamma\delta - \frac{\gamma^2\delta^2}{X} + o(\gamma^2),
\end{aligned}$$

ce qui assure que Y_- tend p.s. vers $\frac{\delta^2}{X} > 0$. Donc $1_{\{U \leq \frac{\delta}{\delta+\gamma Y_-}\}}$ tend p.s. vers 1 et Y vers $\frac{\delta^2}{X}$. Par convergence dominée, on en déduit avec (3.7) que

$$\forall \lambda \geq 0,\ \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda\delta^2}{X}}\right) = \lim_{\gamma \to 0^+} e^{(\gamma - \sqrt{\gamma^2+2\lambda})\delta} = e^{-\delta\sqrt{2\lambda}},$$

ce qui assure que $\frac{\delta^2}{X} \sim IG(0,\delta)$. □

Remarque 3.2.11. • Comme $W_{\tau_\delta} + \gamma\tau_\delta = \delta$, on a $\frac{(\gamma\tau_\delta - \delta)^2}{\tau_\delta} = \frac{W_{\tau_\delta}^2}{\tau_\delta}$, égalité qui peut donner un peu d'intuition sur la clé de la démonstration (pour tout $t > 0$ déterministe $\frac{W_t^2}{t} \sim \chi^2(1)$).

• Pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée, en effectuant le changement de variables $y = \frac{\delta^2}{x}$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\delta^2}{X}\right)\right) = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{\delta^2}{x}\right) e^{-\frac{x}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi x}} = \int_0^{+\infty} \varphi(y)\delta y^{-3/2} e^{-\frac{\delta^2}{2y}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.8}$$

On retrouve bien que $\frac{\delta^2}{X} \sim IG(0, \delta)$.

3.2.3 Processus stables symétriques

Définition 3.2.12. *Une variable aléatoire X et sa loi sont dites stables si pour Y indépendante de X et de même loi*

$$\forall a, b > 0,\ \exists c > 0,\ \exists d \in \mathbb{R},\ aX + bY \overset{\mathcal{L}}{=} cX + d. \tag{3.9}$$

Exemple 3.2.13. 1. Si $X \sim \mathcal{N}_1(\mu, \sigma^2)$, $aX + bY \sim \mathcal{N}_1((a+b)\mu, (a^2+b^2)\sigma^2)$. Donc $aX + bY \overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{a^2+b^2}X + ((a+b) - \sqrt{a^2+b^2})\mu$. Ainsi $c = \sqrt{a^2+b^2}$ et $d = ((a+b) - \sqrt{a^2+b^2})\mu$.

2. Si X suit la loi de Cauchy de paramètre $\sigma > 0$ notée $\mathcal{C}(\sigma)$ de densité $\frac{\sigma}{\pi(x^2+\sigma^2)}$ et de fonction caractéristique $\mathbb{E}(e^{iuX}) = e^{-\sigma|u|}$, alors $\mathbb{E}(e^{iu(aX+bY)}) = e^{-\sigma(a+b)|u|} = \mathbb{E}(e^{iu(a+b)X})$. Ainsi $c = a + b$ et $d = 0$.

3. Si $X \sim IG(0, \delta)$, $X \overset{\mathcal{L}}{=} \inf\{t \geq 0 : W_t \geq \delta\} = \delta^2 \inf\{t \geq 0 : \frac{1}{\delta} W_{\delta^2 t} \geq 1\} \sim \delta^2 IG(0, 1)$, résultat que l'on déduit aussi du lemme 3.2.10. Donc $aX \sim IG(0, \sqrt{a}\delta)$ et $bY \sim IG(0, \sqrt{b}\delta)$ puis $aX + bY \sim IG(0, (\sqrt{a} + \sqrt{b})\delta)$. Ainsi $aX + bY \overset{\mathcal{L}}{=} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 X$ et $c = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, $d = 0$.

Définition 3.2.14. *Une variable aléatoire X et sa loi sont dites symétriques si $X \overset{\mathcal{L}}{=} -X$.*

Le résultat suivant, que nous ne démontrerons pas, caractérise les lois stables symétriques au travers de leur fonction caractéristique.

Théorème 3.2.15. *Soit X une variable aléatoire stable. Il existe $\alpha \in]0, 2]$ tel que pour tous $a, b > 0$, la constante c dans (3.9) est donnée par $c^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$. La constante α s'appelle indice de stabilité de X. Enfin, si X est stable symétrique d'indice α,*

$$\exists \sigma \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{iuX}) = e^{-\sigma^\alpha |u|^\alpha}$$

et on note alors $X \sim S\alpha S(\sigma)$.

Remarque 3.2.16. • Les trois exemples précédents correspondent respectivement à des lois stables d'indice 2, 1 et $\frac{1}{2}$.

• Si $X \sim S\alpha S(1)$ et $\sigma > 0$, alors $\mathbb{E}(e^{i(u\sigma)X}) = e^{-|u\sigma|^\alpha}$, ce qui assure que $\sigma X \sim S\alpha S(\sigma)$.

• $S2S(\sigma) = \mathcal{N}_1(0, 2\sigma^2)$ et $S1S(\sigma) = \mathcal{C}(\sigma)$.

Exemple 3.2.17. Si G_1 et G_2 sont deux gaussiennes centrées réduites indépendantes, $\frac{\sigma}{4}\left(\frac{1}{G_1^2}-\frac{1}{G_2^2}\right) \sim S\frac{1}{2}S(\sigma)$. En effet, cette variable aléatoire est symétrique et comme, d'après le lemme 3.2.10, $\frac{1}{G_1^2} \sim IG(0,1)$, il est facile de vérifier qu'elle est stable d'indice $\frac{1}{2}$. Enfin, comme pour $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda\frac{1}{G_1^2}}\right) = e^{-\sqrt{2\lambda}}$, par prolongement analytique, $\mathbb{E}\left(e^{iu\frac{1}{G_1^2}}\right) = e^{-(1-\text{sign}(u)i)\sqrt{|u|}}$ et $\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\frac{1}{G_1^2}-\frac{1}{G_2^2}\right)}\right) = e^{-2\sqrt{|u|}}$.

Soit $\alpha \in]0,2]$ et $\sigma, \sigma' > 0$. Si $X \sim S\alpha S(\sigma)$ et $Y \sim S\alpha S(\sigma')$ sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(e^{iu(X+Y)}) = e^{-\sigma^\alpha|u|^\alpha}e^{-\sigma'^\alpha|u|^\alpha} = e^{-(\sigma^\alpha+\sigma'^\alpha)|u|^\alpha}$ et $X+Y \sim S\alpha S((\sigma^\alpha+\sigma'^\alpha)^{1/\alpha})$. Cela assure que la loi $S\alpha S(\sigma)$ est indéfiniment divisible. Avec le théorème 3.2.4, on en déduit l'existence d'un processus de Lévy $(Z_t)_{t\geq 0}$ appelé processus stable symétrique d'indice α tel que $Z_1 \sim S\alpha S(\sigma)$ et que $\mathbb{E}(e^{iuZ_t}) = \mathbb{E}(e^{iuZ_1})^t$. D'après le théorème 3.2.15, cette dernière égalité entraîne que $Z_t \sim S\alpha S(\sigma t^{1/\alpha})$.

Exemple 3.2.18.

- Lorsque $\alpha = 2$ et $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce processus est le mouvement brownien.
- Lorsque $\alpha \in]0,2[$, par le changement de variables $x = uh$
$$\int_{\mathbb{R}}(e^{iuh}-1-iuh1_{\{|h|\leq 1\}})\frac{dh}{|h|^{\alpha+1}} = |u|^\alpha\int_{\mathbb{R}}(e^{ix}-1-ix1_{\{|x|\leq 1\}})\frac{dx}{|x|^{\alpha+1}}$$
où par parité de la fonction $\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$, la constante $\int_{\mathbb{R}}(e^{ix}-1-ix1_{\{|x|\leq 1\}})\frac{dx}{|x|^{\alpha+1}}$ est réelle. On en déduit que le triplet associé à Z_1 par la formule de Lévy Kinchine donnée dans la proposition 3.2.5 est $(0,0,\frac{cdx}{|x|^{\alpha+1}})$ avec c une constante de normalisation. Le processus est discontinu et t.q.
$$\forall\beta, t > 0,\ \mathbb{E}(|Z_t|^\beta) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty}|x|^\beta\frac{cdx}{|x|^{\alpha+1}} < +\infty \Leftrightarrow \beta < \alpha.$$

Pour simuler ses accroissements, il suffit d'utiliser $Z_{t+s} - Z_t \overset{\mathcal{L}}{=} \sigma s^{1/\alpha}X$ où la variable aléatoire $X \sim S\alpha S(1)$ peut être générée grâce au résultat suivant.

Proposition 3.2.19. *Soit Θ variable uniforme sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et Y variable exponentielle de paramètre 1 indépendantes. Alors*
$$X = \frac{\sin(\alpha\Theta)}{(\cos(\Theta))^{1/\alpha}}\left(\frac{\cos((1-\alpha)\Theta)}{Y}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \sim S\alpha S(1).$$

Plutôt que de démontrer ce résultat, nous allons voir que pour des valeurs particulières de α, il permet de retrouver des techniques de simulation bien connues :

Cas $\alpha = 1$: on retrouve que $X = \tan(\Theta) \sim \mathcal{C}(1)$.

Cas $\alpha = 2$: $X = \frac{\sin(2\Theta)}{\sqrt{\cos(\Theta)}}\left(\frac{\cos(-\Theta)}{Y}\right)^{-1/2} = \sqrt{2}\sqrt{2Y}\sin(\Theta) \overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{2}\sqrt{2Y}\sin(2\Theta)$. Comme $2Y$ est une variable exponentielle de paramètre $1/2$ indépendante de 2Θ qui suit la loi uniforme sur $[-\pi,\pi]$, d'après la méthode polaire, $\sqrt{2Y}\sin(2\Theta) \sim \mathcal{N}_1(0,1)$. On retrouve ainsi que $X \sim \mathcal{N}_1(0,2)$.

Cas $\alpha = \frac{1}{2}$: $X = \frac{\sin(\Theta/2)}{\cos^2(\Theta)} \times \frac{\cos(\Theta/2)}{Y} = \frac{\sin(\Theta)}{2Y\cos^2(\Theta)}$. Toujours d'après la méthode polaire, $(G_1, G_2) = \sqrt{2Y}(\sin(2\Theta), \cos(2\Theta)) \sim \mathcal{N}_2(0, I_2)$.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{G_1^2} - \frac{1}{G_2^2}\right) = \frac{1}{8Y}\left(\frac{1}{\sin^2(2\Theta)} - \frac{1}{\cos^2(2\Theta)}\right) = \frac{\cos^2(2\Theta) - \sin^2(2\Theta)}{8Y\sin^2(2\Theta)\cos^2(2\Theta)} = \frac{\cos(4\Theta)}{2Y\sin^2(4\Theta)}.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée. Comme la fonction $\gamma \to \frac{\cos(\gamma)}{\sin^2(\gamma)}$ est périodique de période 2π et paire, on obtient en faisant la changement de variables $\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\cos(4\Theta)}{\sin^2(4\Theta)}\right)\right) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\varphi\left(\frac{\cos(\gamma)}{\sin^2(\gamma)}\right)d\gamma = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi\left(\frac{\cos(\gamma)}{\sin^2(\gamma)}\right)d\gamma \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin^2(\frac{\pi}{2}-\theta)}\right)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right)d\theta,\end{aligned}$$

ce qui assure que $\frac{\cos(4\Theta)}{\sin^2(4\Theta)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{\sin(\Theta)}{\cos^2(\Theta)}$.

3.2.4 EDS dirigées par des processus de Lévy

Pour discrétiser l'EDS $dX_t = \sigma(t, X_t^-)dZ_t$ dirigée par le processus de Lévy $(Z_t)_{t\geq 0}$ on peut utiliser le schéma d'Euler qui s'écrit $\bar{X}_{t_{k+1}} = \sigma(t_k, \bar{X}_{t_k})(Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k})$.
Pour simplifier on suppose ici que la dimension d du processus de Lévy et la dimension n de la solution X sont toutes deux égales à 1. L'ordre de convergence faible du schéma reste en $\frac{1}{N}$ comme dans le cas sans saut dès lors que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ ne comporte pas trop de grands sauts. Pour quantifier cela, on demande que la mesure de Lévy ν associée à Z_1 par la formule de Lévy Kinchine donnée dans la proposition 3.2.5 possède suffisamment de moments finis [43].

Lorsqu'il n'est pas possible de simuler les accroissements $Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k}$, on peut simuler les grands sauts qui sont en valeur absolue plus grands qu'un seuil ε et approcher la contribution des petits sauts par un mouvement brownien avec dérive avec même moments d'ordre 1 et 2 [44] [22]. Enfin, [27] est consacré à la construction de schémas d'ordre de convergence faible élevé pour des EDSs dirigées par des processus de Lévy de sauts purs dans l'esprit de ceux introduits dans le paragraphe 1.5 dans le cas brownien.

Chapter 4

Calcul des sensibilités et des couvertures

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux différentes techniques qui permettent d'évaluer la dérivée d'une espérance par rapport à un paramètre. Plus précisément, on considère une variable aléatoire Y^θ qui dépend d'un paramètre réel θ et on s'intéresse à l'espérance $v(\theta) = \mathbb{E}(Y^\theta)$ et à ses dérivées par rapport à θ.

Exemple 4.0.20. Un exemple de cette problèmatique particulièrement important en finance est donné par le calcul de la couverture. Si on s'intéresse à une option européenne de maturité T et de payoff φ dont le sous-jacent évolue suivant le modèle à volatilité aléatoire du paragraphe 2.2.1

$$dX_t^y = \sigma_t X_t^y dW_t + rX_t^y dt, \ X_0 = y,$$

le prix initial de cette option est donné par $v(y) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}\varphi(X_T^y)\right)$. La dérivée $v'(y)$ de ce prix par rapport à la valeur initiale du sous-jacent, couramment appelée delta, est une quantité très importante à calculer pour pouvoir couvrir l'option. Dans le cas d'un modèle à volatilité locale où le marché est complet, c'est la quantité d'actif risqué à détenir à l'instant initial dans le portefeuille de couverture.

4.1 La méthode des différences finies

Elle consiste à approcher les dérivées de v en θ par des combinaisons linéaires bien choisies de valeurs de v en des points proches de θ. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}
v'(\theta) &= \frac{v(\theta+h) - v(\theta)}{h} + \mathcal{O}(h) \ \text{ si } v \text{ est } C^2, \\
v'(\theta) &= \frac{v(\theta+h) - v(\theta-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \ \text{ si } v \text{ est } C^3, \\
v''(\theta) &= \frac{v(\theta+h) + v(\theta-h) - 2v(\theta)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \ \text{ si } v \text{ est } C^3.
\end{aligned}$$

On peut évaluer les valeurs de v en ces points par la méthode de Monte Carlo. Notons que lorsque l'on calcule à la fois $v(\theta)$ et $v'(\theta)$, l'approximation centrée de la dérivée, qui conduit à un biais moins important dans le cas où v est régulière, est plus coûteuse en temps de calcul que l'approximation décentrée.

Pour bien comprendre les enjeux en termes de variance, concentrons nous sur l'exemple de l'approximation décentrée de la dérivée :

$$\frac{v(\theta+h)-v(\theta)}{h}=\frac{\mathbb{E}(Y^{\theta+h})-\mathbb{E}(Y^{\theta})}{h}=\mathbb{E}\left(\frac{Y^{\theta+h}-Y^{\theta}}{h}\right).$$

Les deux écritures de cette approximation qui font intervenir des espérances suggèrent deux approches possibles :

- utiliser des tirages indépendants pour estimer $\mathbb{E}(Y^{\theta+h})$ d'une part et $\mathbb{E}(Y^{\theta})$ d'autre part. La variance $\frac{\text{Var }(Y^{\theta+h})+\text{Var }(Y^{\theta})}{h^2}$ qui en résulte explose alors lorsque $h\to 0$ i.e. lorsque le biais tend vers 0.

- effectuer des tirages de $(Y^{\theta},Y^{\theta+h})$ pour estimer $\mathbb{E}\left(\frac{Y^{\theta+h}-Y^{\theta}}{h}\right)$. Cette approche est justifiée dans le cas où $\theta\to Y^{\theta}$ possède une certaine régularité. En fait, elle diminue la variance par rapport à l'approche précédente dès que Cov $(Y^{\theta},Y^{\theta+h})\geq 0$. Il se peut que $\theta\to v(\theta)$ soit régulière sans que $\theta\to Y^{\theta}$ le soit puisque la régularité de v traduit la régularité de la loi de Y^{θ} en θ et non une régularité trajectorielle. Mais en général, si $v(\theta)$ est régulière, c'est vrai également pour Y^{θ}. En particulier, si $\theta\to Y^{\theta}$ est dérivable p.s. et que l'on peut justifier l'échange entre limite et moments d'ordre 1 et 2, on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{Y^{\theta+h}-Y^{\theta}}{h}=\frac{dY^{\theta}}{d\theta}\ p.s.\text{ et }\lim_{h\to 0}\text{Var }\left(\frac{Y^{\theta+h}-Y^{\theta}}{h}\right)=\text{Var }\left(\frac{dY^{\theta}}{d\theta}\right).$$

  Ainsi il n'y a plus explosion de la variance lorsque $h\to 0$.

De façon générale, le choix de h est délicat. Il faut choisir h petit pour diminuer le biais. Mais il arrive, comme dans le cas de payoffs irréguliers (options barrières ou lookback) que même avec la seconde approche, la variance de l'estimateur explose lorsque $h\to 0$ (même si cette explosion n'est pas en h^{-2} comme dans la première approche).

Exemple 4.1.1. Supposons que l'écart type se comporte comme $Ch^{-\alpha}$ et que le biais comme $C'h^{\beta}$. Par exemple $(\alpha,\beta)=(1,1)$ (resp. $(1,2)$) lorsque l'on estime l'approximation décentrée (resp. centrée) de la dérivée première par la première approche. L'erreur lorsque l'on effectue M tirages se comporte comme $\frac{2Ch^{-\alpha}}{\sqrt{M}}+C'h^{\beta}$. Pour optimiser le temps de calcul, il convient de faire en sorte que les deux contributions soient du même ordre de grandeur. Ainsi on choisit $h^{\beta}=\frac{h^{-\alpha}}{\sqrt{M}}$ ce qui conduit à $h=M^{-\frac{1}{2(\alpha+\beta)}}$ et à une erreur de l'ordre de $M^{-\frac{\beta}{2(\alpha+\beta)}}$. Ainsi pour l'estimateur décentré (resp. centré) de la dérivée première avec tirages indépendants l'erreur est en $M^{-1/4}$ (resp. $M^{-1/3}$).

4.2 L'approche trajectorielle

Dans le cas où $\theta\to Y^{\theta}$ est dérivable p.s., on peut aller jusqu'au bout de la logique de la seconde approche du paragraphe précédent et calculer $\mathbb{E}\left(\frac{dY^{\theta}}{d\theta}\right)$. On obtiendra un estimateur sans biais i.e. on aura $v'(\theta)=\mathbb{E}\left(\frac{dY^{\theta}}{d\theta}\right)$ si l'échange entre espérance et dérivation est possible. On peut essayer de justifier cet échange à l'aide du théorème de convergence dominée ou bien en montrant que les variables aléatoires $\left(n(Y^{\theta+\frac{1}{n}}-Y^{\theta})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont uniformément intégrables.

Exemple 4.2.1. Si $Y^\theta = f(X^\theta)$ où X^θ suit la loi exponentielle de paramètre θ, on peut utiliser l'égalité en loi $X^\theta \overset{\mathcal{L}}{=} -\frac{1}{\theta}\ln(U)$ où U est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Alors, si la fonction f est dérivable, $\frac{d}{d\theta} f\left(-\frac{1}{\theta}\ln(U)\right) = \frac{\ln(U)}{\theta^2} f'\left(-\frac{1}{\theta}\ln(U)\right)$. Si on peut échanger espérance et dérivée, il vient

$$v'(\theta) = \mathbb{E}\left(\frac{\ln(U)}{\theta^2} f'\left(-\frac{1}{\theta}\ln(U)\right)\right) = -\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(X^\theta f'\left(X^\theta\right)\right).$$

4.2.1 Dérivation des solutions d'EDS par rapport à la condition initiale

On considère l'EDS n-dimensionnelle

$$dX_t^y = \sigma(X_t^y)dW_t + b(X_t^y)dt,\ X_0^y = y$$

où $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $X_t^y = (X_t^{y,1}, \ldots, X_t^{y,n}) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $(W_t)_t$ est un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, en dérivant formellement la dynamique

$$dX_t^{y,i} = \sum_{l=1}^d \sigma_{il}(X_t^y)dW_t^l + b_i(X_t^y)dt$$

de la i-ième coordonnée de la solution l'EDS par rapport à la j-ième coordonnée y_j de la condition initiale, on obtient

$$d\frac{\partial X_t^{y,i}}{\partial y_j} = \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^n \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_k}(X_t^y)\frac{\partial X_t^{y,k}}{\partial y_j}dW_t^l + \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_k}(X_t^y)\frac{\partial X_t^{y,k}}{\partial y_j}dt.$$

En reprenant la notation $\partial\sigma_j$ introduite dans (1.18) et en posant dans le même esprit

$$\partial b = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial b_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial b_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial b_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ et } Y_t^y = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_t^{y,1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial X_t^{y,1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial X_t^{y,n}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial X_t^{y,n}}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

on obtient

$$d(Y_t^y)_{ij} = \sum_{l=1}^d (\partial\sigma_l(X_t^y)Y_t^y)_{ij}dW_t^l + (\partial b(X_t^y)Y_t^y)_{ij}dt.$$

Ainsi la matrice $Y_t^y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est formellement solution de

$$\begin{cases} dY_t^y = \sum_{l=1}^d \partial\sigma_l(X_t^y)Y_t^y dW_t^l + \partial b(X_t^y)Y_t^y dt \\ Y_0^y = I_n \end{cases}, \tag{4.1}$$

où I_n désigne la matrice identité $n \times n$. La proposition suivante due à Kunita [28] assure que si les coefficients σ est b sont suffisamment réguliers, cette dérivation formelle est rigoureuse.

Proposition 4.2.2. *Si $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions dérivables à dérivées bornées, alors p.s. pour tout $t \geq 0$, l'application $y \in \mathbb{R}^n \to X_t^y \in \mathbb{R}^n$ est dérivable et sa matrice jacobienne est l'unique solution de* (4.1). *Plus généralement, si σ et b sont C^∞ à dérivées bornées, l'application $y \to X_t^y$ est C^∞ et les dérivées successives sont solution des équations obtenues par dérivations successives de l'EDS de départ.*

Cas de la dimension $n = d = 1$: Si les coefficients $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont C^2 à dérivées bornées, en posant $Z_t^y = \frac{\partial^2 X_t^y}{\partial y^2} = \frac{\partial Y_t^y}{\partial y}$, on a

$$\begin{cases} dX_t^y = \sigma(X_t^y)dW_t + b(X_t^y)dt \\ dY_t^y = \sigma'(X_t^y)Y_t^y dW_t + b'(X_t^y)Y_t^y dt \\ dZ_t^y = \left(\sigma'(X_t^y)Z_t^y + \sigma''(X_t^y)(Y_t^y)^2\right) dW_t + \left(b'(X_t^y)Z_t^y + b''(X_t^y)(Y_t^y)^2\right) dt \\ (X_0^y, Y_0^y, Z_0^y) = (y, 1, 0) \end{cases}.$$

On peut facilement discrétiser cette EDS de dimension 3 par exemple en utilisant le schéma d'Euler. Cela permet d'approcher le delta et le gamma donnés par les formules suivantes dans le cas où l'on peut échanger espérance et dérivation :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\mathbb{E}(f(X_T^y)) = \mathbb{E}(f'(X_T^y)Y_T^y)} \text{ et } \boxed{\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathbb{E}(f(X_T^y)) = \mathbb{E}\left(f'(X_T^y)Z_T^y + f''(X_T^y)(Y_T^y)^2\right).}$$

Exemple 4.2.3. Dans le modèle de Black-Scholes, $X_t^y = ye^{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t} = yX_t^1$, ce qui assure $Y_t^y = X_t^1$ et $Z_t^y = 0$.

Remarque 4.2.4. Pour les options asiatiques, on a $\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{T}\int_0^T X_t^y dt = \frac{1}{T}\int_0^T Y_t^y dt$. Pour les options lookback, on perd en général la dérivabilité sauf dans le cas du modèle de Black-Scholes pour lequel $\max_{t\in[0,T]} X_t^y = y \max_{t\in[0,T]} X_t^1$, ce qui assure $\frac{\partial}{\partial y}\max_{t\in[0,T]} X_t^y = \max_{t\in[0,T]} X_t^1$.

Dans le cas d'un Call digital, la fonction de payoff $f(x) = 1_{\{x\geq K\}}$ n'est pas dérivable, ce qui empêche d'appliquer l'approche trajectorielle que nous venons de présenter. Nous allons voir qu'en utilisant une intégration par parties, il est possible de faire porter la dérivée sur la loi de X_T^y plutôt que sur la fonction f. Cette approche, développée dans le paragraphe suivant, permet d'exprimer le delta du Call digital sous forme d'espérance et donc de le calculer par la méthode de Monte Carlo.

4.3 Intégration par parties

4.3.1 La méthode du rapport de vraisemblance

Revenons au problème du calcul de $v'(\theta)$ où $v(\theta) = \mathbb{E}(Y^\theta)$. Si pour tout θ, $Y^\theta = f(X^\theta)$ où X^θ possède une densité $p(x,\theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est cette densité qu'il faut dériver. Comme $v(\theta) = \int f(x)p(x,\theta)dx$, dans le cas où l'on peut échanger intégrale et dérivation, on a

$$v'(\theta) = \int f(x)\frac{\partial p}{\partial \theta}(x,\theta)dx = \int f(x)\frac{\partial \ln p}{\partial \theta}(x,\theta)p(x,\theta)dx.$$

Ainsi

$$\boxed{v'(\theta) = \mathbb{E}\left(f(X^\theta)\frac{\partial \ln p}{\partial \theta}(X^\theta, \theta)\right).}$$

La dérivée s'exprime comme l'espérance de la variable aléatoire de départ $f(X^\theta)$ multipliée par un poids qui ne dépend pas de f. En outre, il n'y a pas besoin de supposer f régulière pour que le membre de droite ait un sens.

Exemple 4.3.1. Si X^θ suit la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ de densité $p(x, \theta) = 1_{\{x>0\}}\theta e^{-\theta x}$, pour $x > 0$, $\ln(p(x,\theta)) = \ln(\theta) - \theta x$ et $\frac{\partial \ln p}{\partial \theta}(x, \theta) = \frac{1}{\theta} - x$. Alors $v'(\theta) = \mathbb{E}\left(f(X^\theta)\left(\frac{1}{\theta} - X^\theta\right)\right)$. On retrouve cette formule si on reprend l'expression de $v'(\theta)$ obtenue par l'approche trajectorielle dans l'exemple 4.2.1 et on effectue une intégration par parties :

$$v'(\theta) = -\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(X^\theta f'\left(X^\theta\right)\right) = -\int_0^{+\infty} f'(x)xe^{-\theta x}dx = \int_0^{+\infty} f(x)(1-\theta x)e^{-\theta x}dx.$$

4.3.2 Le cas du modèle de Black-Scholes

Dans le cas du modèle de Black-Scholes, le delta de l'option européenne de maturité T et de payoff φ est égal à $v'(y)$ où $v(y) = \mathbb{E}\left(f\left(X_T^y\right)\right)$ avec $f = e^{-rT}\varphi$ et $X_T^y = ye^{\sigma W_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}$. On a, en effectuant le changement de variables $x = ye^{\sigma z + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}$ pour la seconde égalité

$$v(y) = \int_{\mathbb{R}} f\left(ye^{\sigma z + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}\right)e^{-\frac{z^2}{2T}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi T}} = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left(\ln(\frac{x}{y}) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T\right)^2}\frac{dx}{\sigma x\sqrt{2\pi T}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left(\ln(x/y) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T\right)^2} \\
\ln(p)(x,y) &= -\frac{1}{2\sigma^2 T}\left(\ln(x/y) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T\right)^2 - \ln\left(\sigma x\sqrt{2\pi T}\right) \\
\frac{\partial \ln p}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{\sigma^2 T y}\left(\ln(x/y) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T\right).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
v'(y) &= \int_0^{+\infty} f(x)\frac{1}{\sigma^2 T y}\left(\ln(x/y) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T\right)e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left(\ln(\frac{x}{y}) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T\right)^2}\frac{dx}{\sigma x\sqrt{2\pi T}} \\
&= \mathbb{E}\left(f\left(X_T^y\right)\frac{1}{\sigma^2 T y}\left(\ln(X_T^y/y) - (r-\frac{\sigma^2}{2})T\right)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{v'(y) = \mathbb{E}\left(f(X_T^y)\frac{W_T}{\sigma y T}\right).} \tag{4.2}$$

Dans l'exemple du modèle exponentiel, nous avons vu que la formule du rapport de vraisemblance se retrouve en effectuant une intégration par parties dans la formule obtenue par l'approche trajectorielle. Cela reste le cas dans le modèle de Black-Scholes. Dans ce cas, il est en fait plus facile d'effectuer une intégration par parties par rapport à la loi de W_T dont l'expression analytique est plus simple. D'après l'approche trajectorielle,

$$\begin{aligned} v'(y) &= \mathbb{E}(f'(X_T^y)X_T^1) = \mathbb{E}\left(f'\left(ye^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\right)e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'\left(ye^{\sigma z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\right)e^{\sigma z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}e^{-\frac{z^2}{2T}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi T}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma y}\frac{\partial}{\partial z}\left[f\left(ye^{\sigma z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\right)\right]e^{-\frac{z^2}{2T}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi T}} \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f\left(ye^{\sigma z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\right)\frac{-z}{\sigma yT}e^{-\frac{z^2}{2T}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi T}} = \mathbb{E}\left(f(X_T^y)\frac{W_T}{\sigma yT}\right). \end{aligned}$$

Même s'il faut que f soit régulière pour effectuer ce raisonnement, la formule obtenue (4.2) reste vraie pour des fonctions f non régulières que l'on approche par un procédé de régularisation.

En dérivant (4.2) par l'approche trajectorielle, il vient la formule suivante pour le gamma :

$$v''(y) = \mathbb{E}\left(-f(X_T^y)\frac{W_T}{\sigma Ty^2} + f'(X_T^y)X_T^1\frac{W_T}{\sigma Ty}\right).$$

Comme précédemment, on peut remplacer f' par f au prix d'une intégration par parties.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(f'(X_T^y)X_T^1W_T\right) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma y}\frac{\partial}{\partial z}\left[f\left(ye^{\sigma z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\right)\right]ze^{-\frac{z^2}{2T}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi T}} \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f\left(ye^{\sigma z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\right)\frac{1-z^2/T}{\sigma y}e^{-\frac{z^2}{2T}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi T}} \\ &= \mathbb{E}\left(f(X_T^y)\left(\frac{W_T^2}{\sigma yT}-\frac{1}{\sigma y}\right)\right). \end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{v''(y) = \mathbb{E}\left(\frac{f(X_T^y)}{\sigma Ty^2}\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - W_T - \frac{1}{\sigma}\right)\right).}$$

On peut également faire apparaître un poids multipliant $f(X_T^y)$ pour le calcul d'autres dérivées comme la dérivée par rapport à la volatilité σ que l'on appelle vega.

Les formules que nous venons d'obtenir cumulent plusieurs avantages :

1. il n'y a pas de biais comme dans l'approche par différences finies,
2. avec les mêmes trajectoires browniennes, on calcule X_T^y et les poids,
3. comme les poids ne dépendent pas du payoff, on peut calculer les prix et les sensibilités de plusieurs options simultanément,
4. il n'y a pas besoin de régularité sur f; on peut calculer le delta d'un Call digital ou le gamma d'un Call standard.

4.3.3 Le cas d'un modèle général en dimension 1

Le plus souvent, l'obtention de formules généralisant celles que nous venons de démontrer dans le modèle de Black-Scholes repose sur la formule d'intégration par parties du calcul de Malliavin. Néanmoins, dans le cadre suivant, on peut suivre l'approche beaucoup plus simple proposée par Gobet [16]. Pour l'équation différentielle stochastique en dimension $n = d = 1$

$$dX_t^y = \sigma(X_t^y)dW_t + b(X_t^y)dt, \ X_0^y = y,$$

on note $Y_t^y = \frac{\partial X_t^y}{\partial y}$. On a alors

Proposition 4.3.2.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\mathbb{E}(f(X_T^y)) = \mathbb{E}\left(f(X_T^y)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{Y_t^y}{\sigma(X_t^y)}dW_t\right).}$$

Remarque 4.3.3.

- Cette approche permet d'exprimer sous forme d'espérance le delta du Call digital qui correspond au payoff $f(x) = 1_{\{x \geq K\}}$.
- Dans le cas du modèle de Black-Scholes, $\frac{Y_t^y}{\sigma(X_t^y)} = \frac{X_t^1}{\sigma X_t^y} = \frac{1}{\sigma y}$ et $\frac{1}{T}\int_0^T \frac{Y_t^y}{\sigma(X_t^y)}dW_t = \frac{W_T}{\sigma y T}$. Ainsi on retrouve la formule (4.2).
- Il existe beaucoup de poids Z_T tels que $\frac{\partial}{\partial y}\mathbb{E}(f(X_T^y)) = \mathbb{E}(f(X_T^y)Z_T)$ pour toute fonction de payoff f. En fait, il suffit pour cela que
$$\mathbb{E}(Z_T|X_T^y) = Z_T^* \ \text{ où } \ Z_T^* = \mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \frac{Y_t^y}{\sigma(X_t^y)}dW_t \middle| X_T^y\right). \tag{4.3}$$
Notons que Z_T^* est le poids qui permet de minimiser la variance ou, ce qui est équivalent, $\mathbb{E}(f^2(X_T^y)Z_T^2)$. En effet, l'inégalité de Jensen et (4.3) entraînent $\mathbb{E}(Z_T^2|X_T^y) \geq (Z_T^*)^2$. On en déduit que
$$\mathbb{E}\left(f^2(X_T^y)Z_T^2\right) = \mathbb{E}\left(f^2(X_T^y)\mathbb{E}(Z_T^2|X_T^y)\right) \geq \mathbb{E}\left(f^2(X_T^y)(Z_T^*)^2\right).$$
- Dans le modèle de Black-Scholes, il est équivalent de connaître X_T^y et de connaître W_T, ce qui assure que les poids obtenus au paragraphe précédent sont optimaux.

Démonstration : On introduit la solution u de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{\sigma^2(x)}{2}\partial_{xx}u(t,x) + b(x)\partial_x u(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R} \\ u(T,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Par la formule d'Itô et en utilisant l'EDP, on obtient

$$u(t, X_t^y) = u(0,y) + \int_0^t \sigma(X_s^y)\partial_x u(s, X_s^y)dW_s. \tag{4.4}$$

Donc $u(0,y) = \mathbb{E}(u(t,X_t^y)) = \mathbb{E}(f(X_T^y))$ et en admettant l'échange de la dérivée et de l'espérance, $\mathbb{E}(\partial_x u(t,X_t^y)Y_t^y) = \partial_y \mathbb{E}(f(X_T^y))$. En utilisant (4.4) pour $t = T$, puis la formule d'isométrie pour les intégrales stochastique et enfin la dernière égalité, on conclut

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f(X_T^y)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{Y_t^y}{\sigma(X_t^y)}dW_t\right) &= \mathbb{E}\left(\left(u(0,y) + \int_0^T \sigma(X_t^y)\partial_x u(t,X_t^y)dW_t\right)\frac{1}{T}\int_0^T \frac{Y_t^y}{\sigma(X_t^y)}dW_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \sigma(X_t^y)\partial_x u(t,X_t^y)\frac{Y_t^y}{\sigma(X_t^y)}dt\right) \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\left(\partial_x u(t,X_t^y)Y_t^y\right)dt = \partial_y \mathbb{E}(f(X_T^y)).
\end{aligned}$$

□

Bibliography

[1] Alfonsi, A.: On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes, Monte Carlo Methods and Applications 11(4):355-384, 2005.

[2] Alfonsi, A.: High order discretization schemes for the CIR process: Application to affine term structure and Heston models, Mathematics of Computation 79:209-237, 2010.

[3] Alfonsi, A., Jourdain,B. and Kohatsu-Higa,A.: Pathwise optimal transport bounds between a one-dimensional diffusion and its Euler scheme, Ann. Appl. Probab. 24(3):1049-1080, 2014

[4] Applebaum, D.: Lévy processes and stochastic calculus. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 93. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] Bertoin, J.: Lévy processes. Cambridge Tracts in Mathematics, 121. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[6] Bally, V. and Talay, D.: The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (I) : convergence rate of the distribution function. Probability Theory and Related Fields, 104:43-60, 1995.

[7] Bally, V. and Talay, D.: The law of the Euler scheme for stochastic differential equations (II) : convergence rate of the density. Monte Carlo Methods and Applications, 2:93-128, 1996.

[8] Barndorff-Nielsen, O.: Processes of normal inverse Gaussian type. Finance Stoch. 2(1):41-68, 1998.

[9] Beskos, A., Papaspiliopoulos, O. and Roberts, G.: Retrospective exact simulation of diffusion sample paths with applications. Bernoulli 12(6):1077-1098, 2006.

[10] Beskos, A., Papaspiliopoulos, O., Roberts, G.and Fearnhead, P.: Exact and computationally efficient likelihood-based estimation for discretely observed diffusion processes. J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. 68(3)333-382, 2006.

[11] Beskos, A. and Roberts, G.: Exact simulation of diffusions. Ann. Appl. Probab. 15(4):2422-2444, 2005.

[12] Carr, P., Geman, H., Madan, D.B. and Yor, M.: From local volatility to local Lévy models. Quant. Finance 4(5):581–588, 2004.

[13] Gaines, J. and Lyons, T.: Random generation of stochastic area integrals. SIAM J. Appl. Math. 54(4):1132-1146, August 1994

[14] Giles, M.: Multi-level Monte Carlo path simulation, Operations Research, 56(3):607-617, 2008.

[15] Giles, M. and Szpruch, L.: Antithetic multilevel Monte Carlo estimation for multi-dimensional SDEs without Lévy area simulation, Ann. Appl. Probab. 24(4):1585-1620, 2014.

[16] Gobet, E.: Revisiting the Greeks for European and American options. Proceedings of the "International Symposium on Stochastic Processes and Mathematical Finance" at Ritsumeikan University, Kusatsu, Japan, March 2003. 18 pages. 2004.

[17] Gobet, E. Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes. Stochastic Processes and their Applications, 87:167-197, 2000.

[18] Gobet, E. Euler Schemes and Half-Space Approximation for the Simulation of Diffusion in a Domain, ESAIM P&S, 5:261-297, 2001.

[19] Gobet, E. Menozzi, S. Exact approximation rate of killed hypoelliptic diffusions using the discrete Euler scheme, Stochastic Processes and their Applications, 112(2):201-223, 2004.

[20] Guyon, J.: Euler scheme and tempered distributions. Stochastic Processes and their Applications, 116(6):877-904, 2006.

[21] Hutzenthaler, M., Jentzen, A. and Kloeden, P. E., Strong convergence of an explicit numerical method for SDEs with non-globally Lipschitz continuous coefficients, Annals of Applied Probability 22(4):1611-1641, 2012.

[22] Jacod, J., Kurtz, T.G., Méléard, S., Protter, P.: The approximate Euler method for Lévy driven stochastic differential, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 41(3):523-558, 2005.

[23] Jourdain, B. and Sbai, M.: Exact retrospective Monte Carlo computation of arithmetic average Asian options, Monte Carlo methods and Applications 13(2):135-171, 2007.

[24] Jourdain, B. and Sbai, M.: High order discretization schemes for stochastic volatility models, Journal of Computational Finance, to appear.

[25] Kloeden, P. E. and Platen, E.: Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer Berlin Heidelberg New York, 1992.

[26] Kemna, A. G. Z. and Vorst, A. C. F.: A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values. Journal of Banking and Finance, 14:113-129, March 1990.

[27] Kohatsu-Higa, A. and Tankov, P.: Jump adapted discretization schemes for Lévy driven SDEs, Stochastic Process. Appl., 120(11):2258-2285, 2010.

[28] Kunita, H.: Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge University Press, 1990.

[29] Kurtz, T. and Protter, P.: Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. Stochastic analysis, 331–346, Academic Press, Boston, MA, 1991.

[30] Kusuoka, S.: Approximation of expectation of diffusion process and mathematical finance. Taniguchi Conference on Mathematics Nara '98, 147-165, Adv. Stud. Pure Math., 31, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[31] Kusuoka, S.: Approximation of expectation of diffusion processes based on Lie algebra and Malliavin calculus. Advances in mathematical economics. Vol. 6, 69-83, 2004.

[32] Lapeyre, B. and Temam, E.: Competitive Monte Carlo methods for the pricing of Asian Options. Journal of Computational Finance, 5(1):39-59, Fall 2001

[33] Lyons, T. and Victoir, N.: Cubature on Wiener space. Stochastic analysis with applications to mathematical finance. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 460:169-198, 2004.

[34] Milstein, G. N.: Numerical integration of stochastic differential equations. Translated and revised from the 1988 Russian original. Mathematics and its Applications, 313. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995

[35] Madan, D., Carr, P. and Chang, E.: The Variance Gamma Process and Option Pricing, European Finance Review 2:79-105, 1998.

[36] Newton, N.: Variance reduction for simulated diffusions. SIAM J. Appl. Math. 54(6):1780-1805, 1994.

[37] Newton, N.: Asymptotically efficient Runge-Kutta methods for a class of Itô and Stratonovich equations. SIAM J. Appl. Math. 51(2):542-567, 1991.

[38] Ninomiya, S.: A new simulation scheme of diffusion processes : application of the Kusuoka approximation to finance problems. Math. Comput. Simulation 62:479-486, 2003.

[39] Ninomiya, S.: A partial sampling method applied to the Kusuoka approximation. Monte Carlo Methods Appl. 9(1):27-38, 2003.

[40] Ninomiya, S. and Victoir, N.: Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing, Applied Mathematical Finance, 15(2):107-121, 2008.

[41] Ninomiya, M. and Ninomiya, S.: A new higher-order weak approximation scheme for stochastic differential equations and the Runge-Kutta method. Finance and Stochastics 13:415-443, 2009.

[42] Pagès, G. Multi-step Richardson-Romberg extrapolation: remarks on variance control and complexity. Monte Carlo Methods Appl. 13(1):37-70, 2007.

[43] Protter, P. and Talay, D.: The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations. Ann. Probab. 25(1):393-423, 1997.

[44] Rubenthaler, S.: Numerical simulation of the solution of a stochastic differential equation driven by a Lévy process. Stochastic Process. Appl. 103(2):311-349, 2003.

[45] Sato, K.: Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 68. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[46] Talay, D. and Tubaro, L.: Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. Stochastic Anal. Appl. 8(4):483-509, 1990.

[47] Tanaka, H. and Kohatsu-Higa, A.: An operator approach for Markov chain weak approximations with an application to infinite activity Lévy driven SDEs. Ann. Appl. Probab 19(3):1026-1062, 2009.

[48] Temam, E.: Couverture approchée d'options exotiques. Pricing des options asiatiques. PhD thesis, Université Paris 6, 2001.