

# Transport Optimal (Martingale)

Examen du mardi 31 mars 2026 9h00-12h00

On note  $F_\eta(x) = \eta((-\infty, x])$  et  $F_\eta^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_\eta(x) \geq u\}$ ,  $u \in ]0, 1[$  la fonction de répartition et la fonction quantile de  $\eta \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . On pose également  $\Psi_\eta(x) = \int_{-\infty}^x F_\eta(y)dy$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et pour  $u \in ]0, 1[$ ,  $\Psi_\eta^*(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}}\{ux - \Psi_\eta(x)\}$ .

1. Pour  $U \sim \mathcal{U}]0, 1[$ , quelle est la loi de  $F_\eta^{-1}(U)$ ?
2. Vérifier que pour  $u \in ]0, 1[$ ,  $F_\eta(F_\eta^{-1}(u)) \geq u$  et que si  $x < F_\eta^{-1}(u)$ ,  $F_\eta(x) < u$ . Lorsque  $F_\eta$  est continue, en déduire que pour tout  $u \in ]0, 1[$ ,  $F_\eta(F_\eta^{-1}(u)) = u$  puis que  $\int_{\mathbb{R}} g(F_\eta(x), x)\eta(dx) = \int_0^1 g(u, F_\eta^{-1}(u))du$  pour toute fonction  $g : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable.
3. Vérifier que pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\int_{\mathbb{R}} (x - y)^+\eta(dy) = \int_{-\infty}^x F_\eta(z)dz$  (Écrire  $(x - y)^+ = \int_{-\infty}^x 1_{\{y \leq z\}}dz$ ). En déduire que  $\Psi_\eta$  est à valeurs réelles si et seulement si  $\int (-y)^+\eta(dy) < \infty$ .

On suppose cette condition satisfaite.

4. Soit  $u \in ]0, 1[$ . Remarquer que pour  $x \leq \tilde{x}$ , on a  $u\tilde{x} - \Psi_\eta(\tilde{x}) - (ux - \Psi_\eta(x)) = \int_x^{\tilde{x}} (u - F_\eta(y))dy$  et en déduire que  $\Psi_\eta^*(u) = uF_\eta^{-1}(u) - \int_{-\infty}^{F_\eta^{-1}(u)} F_\eta(y)dy$ . Vérifier que pour  $y \in \mathbb{R}$ ,  $F_\eta(y) = \int_{v=0}^1 1_{\{F_\eta^{-1}(v) \leq y\}}dv$ . Conclure que  $\Psi_\eta^*(u) = \int_0^u F_\eta^{-1}(v)dv$  et que  $\Psi_\eta^*$  est à valeurs réelles.

Soient  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  telles que  $\mu \leq_{cx} \nu$ . On pose  $\Psi_+(u) = \int_0^u (F_\mu^{-1}(v) - F_\nu^{-1}(v))^+dv$  et  $\Psi_-(u) = \int_0^u (F_\nu^{-1}(v) - F_\mu^{-1}(v))^+dv$  pour  $u \in [0, 1]$ .

5. Justifier que  $\Psi_+(1) = \Psi_-(1)$  et que  $\mathcal{W}_1(\mu, \nu) = \Psi_+(1) + \Psi_-(1)$ .
6. Que peut-on dire de l'ensemble  $\Pi_M(\mu, \nu)$  des couplages martingales entre  $\mu$  et  $\nu$ ? Quel résultat assure cela?
7. Vérifier que  $\Psi_\mu \leq \Psi_\nu$  et  $\Psi_\nu^* \leq \Psi_\mu^*$ . En déduire que  $\Psi_- \leq \Psi_+$ .

On note  $\Psi_\pm^{-1}(v) = \inf\{u \in [0, 1] : \Psi_\pm(u) \geq v\}$  pour  $v \in [0, \Psi_\pm(1)]$  et

$$\varphi(u) = 1_{\{F_\mu^{-1}(u) = F_\nu^{-1}(u)\}}u + 1_{\{F_\mu^{-1}(u) > F_\nu^{-1}(u)\}}\Psi_-^{-1}(\Psi_+(u)) + 1_{\{F_\mu^{-1}(u) < F_\nu^{-1}(u)\}}\Psi_+^{-1}(\Psi_-(u)),$$

pour  $u \in [0, 1]$ . On suppose que  $\Psi_+(1) > 0$ .

8. Montrer que pour  $u \in ]0, 1[$ ,  $\Psi_+^{-1}(\Psi_-(u)) \leq u$  et que lorsque  $F_\mu^{-1}(u) > F_\nu^{-1}(u)$  alors  $\Psi_+(u) > \Psi_-(u)$  et  $\Psi_-^{-1}(\Psi_+(u)) \geq u$ .

9. On pose  $\eta_{\pm}(dv) = \frac{1_{]0,1[}(v)}{\Psi_+(1)}(F_{\mu}^{-1}(v) - F_{\nu}^{-1}(v))^{\pm}dv$ . Exprimer  $F_{\eta_{\pm}}$  à l'aide de  $\Psi_{\pm}$  et  $F_{\eta_{\pm}}^{-1}$  à l'aide de  $\Psi_{\pm}^{-1}$  et de  $\Psi_+(1)$ . Conclure à l'aide de la question 1 que pour  $h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable

$$\int_0^1 h(\varphi(v), v)(F_{\mu}^{-1}(v) - F_{\nu}^{-1}(v))^+ dv = \int_0^1 h(v, \varphi(v))(F_{\nu}^{-1}(v) - F_{\mu}^{-1}(v))^+ dv.$$

10. Avec des choix appropriés de  $h$ , en déduire que  $du$  p.p. dans  $]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} F_{\mu}^{-1}(u) > F_{\nu}^{-1}(u) &\Rightarrow F_{\nu}^{-1}(\varphi(u)) > F_{\mu}^{-1}(\varphi(u)) \geq F_{\mu}^{-1}(u) > F_{\nu}^{-1}(u), \\ F_{\mu}^{-1}(u) < F_{\nu}^{-1}(u) &\Rightarrow F_{\nu}^{-1}(\varphi(u)) < F_{\mu}^{-1}(\varphi(u)) \leq F_{\mu}^{-1}(u) < F_{\nu}^{-1}(u). \end{aligned}$$

On suppose toujours que  $\mu \leq_{cx} \nu$ . Pour  $(U, V)$  un couple de variables aléatoires indépendantes distribuées suivant  $\mathcal{U}]0, 1[$ , on pose

$$X = F_{\mu}^{-1}(U) \text{ et } Y = 1 \left\{ V \leq \frac{F_{\nu}^{-1}(\varphi(U)) - F_{\mu}^{-1}(U)}{F_{\nu}^{-1}(\varphi(U)) - F_{\nu}^{-1}(U)} \right\} F_{\nu}^{-1}(U) + 1 \left\{ V > \frac{F_{\nu}^{-1}(\varphi(U)) - F_{\mu}^{-1}(U)}{F_{\nu}^{-1}(\varphi(U)) - F_{\nu}^{-1}(U)} \right\} F_{\nu}^{-1}(\varphi(U))$$

avec la convention que  $\frac{F_{\nu}^{-1}(\varphi(u)) - F_{\mu}^{-1}(u)}{F_{\nu}^{-1}(\varphi(u)) - F_{\nu}^{-1}(u)} = 1$  lorsque  $F_{\nu}^{-1}(\varphi(u)) = F_{\nu}^{-1}(u)$ .

11. Montrer que pour  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable,

$$\mathbb{E} \left[ 1 \left\{ V > \frac{F_{\nu}^{-1}(\varphi(U)) - F_{\mu}^{-1}(U)}{F_{\nu}^{-1}(\varphi(U)) - F_{\nu}^{-1}(U)} \right\} g(F_{\nu}^{-1}(\varphi(U))) \right] = \int_{u=0}^1 g(F_{\nu}^{-1}(u)) \frac{F_{\nu}^{-1}(u) - F_{\mu}^{-1}(u)}{F_{\nu}^{-1}(u) - F_{\nu}^{-1}(\varphi(u))} du.$$

12. En déduire que  $Y \sim \nu$  puis que  $\mathcal{L}((X, Y)) \in \Pi_M(\mu, \nu)$ .

Pour  $\rho \geq 1$  et  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_{\rho}(\mathbb{R}^d)$  telles que  $\mu \leq_{cx} \nu$ , on pose  $\underline{\mathcal{M}}_{\rho}(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi_M(\mu, \nu)} \left( \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |y - x|^{\rho} \pi(dx, dy) \right)^{1/\rho}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{\rho}(\mu, \nu) = \sup_{\pi \in \Pi_M(\mu, \nu)} \left( \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |y - x|^{\rho} \pi(dx, dy) \right)^{1/\rho}$ .

13. Vérifier que pour  $a, b \in \mathbb{R}_+$  tels que  $a + b > 0$ ,  $\frac{a^{\rho}b + ab^{\rho}}{a+b} \leq 2a(a+b)^{\rho-1}$ .

14. En déduire que pour  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_{\rho}(\mathbb{R})$  telles que  $\mu \leq_{cx} \nu$ ,

$$\underline{\mathcal{M}}_{\rho}^{\rho}(\mu, \nu) \leq 2 \int_0^1 |F_{\nu}^{-1}(u) - F_{\nu}^{-1}(\varphi(u))|^{\rho-1} |F_{\nu}^{-1}(u) - F_{\mu}^{-1}(u)| du,$$

et que  $\underline{\mathcal{M}}_1(\mu, \nu) \leq 2\mathcal{W}_1(\mu, \nu)$  lorsque  $\rho = 1$ .

15. Soit  $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\nu_n = \frac{1}{2}(\delta_{-(1+\frac{1}{n})} + \delta_{1+\frac{1}{n}})$ . Vérifier que  $\Pi_M(\mu, \nu_n)$  est un singleton et expliciter son unique élément. En déduire que  $\underline{\mathcal{M}}_1(\mu, \nu) = \frac{2n+1}{n(n+1)}$ . Calculer  $\mathcal{W}_1(\mu, \nu_n)$  et conclure que la constante 2 au second membre de la seconde inégalité de la question précédente est optimale.

16. On suppose que  $\rho \in ]1, 2]$  et on pose  $\bar{\nu} = \int_{\mathbb{R}} y \nu(dy)$ . Vérifier que

$$\underline{\mathcal{M}}_{\rho}^{\rho}(\mu, \nu) \leq 4 \int_0^1 |F_{\nu}^{-1}(u) - \bar{\nu}|^{\rho-1} |F_{\nu}^{-1}(u) - F_{\mu}^{-1}(u)| du.$$

Conclure que  $\underline{\mathcal{M}}_{\rho}^{\rho}(\mu, \nu) \leq 4 \mathcal{W}_{\rho}(\mu, \nu) \left( \int |y - \bar{\nu}|^{\rho} \nu(dy) \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}$ .

Nous allons montrer que pour  $\rho \geq 2$ ,

$$\exists C_{\rho}, \tilde{C}_{\rho} < \infty, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, |y - x|^{\rho} \leq C_{\rho}((\rho - 1)|x|^{\rho} + |y|^{\rho} - \rho|x|^{\rho-2}x \cdot y) \quad (1)$$

$$\text{et } |y|^{\rho} - |x|^{\rho} \leq \tilde{C}_{\rho}|y - x|(|y|^{\rho-1} + |x|^{\rho-1}). \quad (2)$$

17. Pour  $\rho = 2$ , donner les constantes optimales  $C_2$  et  $\tilde{C}_2$  et vérifier que pour ce choix, (1) est même une égalité. Vérifier que pour  $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$  telles que  $\mu \leq_{cx} \nu$ ,  $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |y - x|^2 \pi(dx, dy)$  ne dépend pas de  $\pi \in \Pi_M(\mu, \nu)$ .

18. Pour  $\rho \geq 2$  donner les constantes  $C_{\rho}$  et  $\tilde{C}_{\rho}$  minimales pour que (1) et (2) soient vraies pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$  lorsque  $x = 0$ .

19. On pose  $\bar{\nu} = \int_{\mathbb{R}^d} y \nu(dy)$ . En admettant (1) et (2), vérifier que pour  $\pi \in \Pi_M(\mu, \nu)$  et  $\tilde{\pi} \in \tilde{\Pi}(\mu, \nu)$ ,

$$\int |(y - \bar{\nu}) - (x - \bar{\nu})|^{\rho} \pi(dx, dy) \leq C_{\rho} \tilde{C}_{\rho} \int |y - x| (|y - \bar{\nu}|^{\rho-1} + |x - \bar{\nu}|^{\rho-1}) \tilde{\pi}(dx, dy).$$

20. Montrer que  $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto |x - \bar{\nu}|^{\rho}$  est convexe et en déduire que

$$\forall \mu, \nu \in \mathcal{P}_{\rho}(\mathbb{R}^d) \text{ telles que } \mu \leq_{cx} \nu, \overline{\mathcal{M}}_{\rho}^{\rho}(\mu, \nu) \leq 2C_{\rho} \tilde{C}_{\rho} \mathcal{W}_{\rho}(\mu, \nu) \left( \int |y - \bar{\nu}|^{\rho} \nu(dy) \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}.$$

On suppose désormais  $\rho > 2$ .

21. Pour  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et  $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ , on pose  $e = \frac{x}{|x|}$ ,  $z = \frac{x \cdot y}{|x|^2}$ . Vérifier que  $\frac{y}{|x|} - ze = we^{\perp}$  avec  $w \in \mathbb{R}_+$  et  $e^{\perp} \in \mathbb{R}^d$  tel que  $e \cdot e^{\perp} = 0$  et  $|e^{\perp}| = 1$ .

22. Vérifier que (1) est une conséquence de l'existence de  $C_{\rho} \in [1, +\infty[$  telle que

$$\forall (z, w) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}, ((z-1)^2 + w^2)^{\frac{\rho}{2}} \leq C_{\rho} \varphi(z, w) \text{ où } \varphi(z, w) = (\rho-1) + (z^2 + w^2)^{\frac{\rho}{2}} - \rho z.$$

23. Donner la limite de  $\frac{((1-z)^2 + w^2)^{\frac{\rho}{2}}}{\varphi(z, w)}$  lorsque  $|z| + |w| \rightarrow +\infty$ . Vérifier que pour  $(z, w) \rightarrow (1, 0)$ ,  $\varphi(z, w) \sim \frac{\rho}{2}(\rho-1)(z-1)^2 + \frac{\rho}{2}w^2$  et conclure que (1) est vraie.

24. Vérifier que (2) est une conséquence de l'existence de  $\tilde{C}_{\rho} \in [1, +\infty[$  telle que

$$\forall (z, w) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}, (z^2 + w^2)^{\frac{\rho}{2}} - 1 \leq \tilde{C}_{\rho}((z-1)^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \left( (z^2 + w^2)^{\frac{\rho-1}{2}} + 1 \right).$$

25. Donner la limite de  $\frac{(z^2 + w^2)^{\frac{\rho}{2}} - 1}{((z-1)^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \left( (z^2 + w^2)^{\frac{\rho-1}{2}} + 1 \right)}$  lorsque  $|z| + |w| \rightarrow +\infty$ . Vérifier

que pour  $(z, w) \rightarrow (1, 0)$ ,  $(z^2 + w^2)^{\frac{\rho}{2}} - 1 \sim \frac{\rho}{2}(2(z-1) + w^2)$  et en déduire que

$$\limsup_{(z, w) \rightarrow (1, 0)} \frac{(z^2 + w^2)^{\frac{\rho}{2}} - 1}{((z-1)^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \left( (z^2 + w^2)^{\frac{\rho-1}{2}} + 1 \right)} = \frac{\rho}{2}. \text{ Conclure que (2) est vraie.}$$