Option européenne vanille $\longrightarrow$ payoff $f(S_T)$ où $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est continue à croissance au plus affine

$$\mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)} f(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right) = F(t, S_t)$$

où $F(t,x) = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)} f\left(x\, e^{\sigma W_{T-t} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\right)\right)$

<u>Lemme</u> :

$$\begin{cases} \partial_t F(t,x) + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \partial_{xx} F(t,x) + rx\,\partial_x F(t,x) - r F(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,T[\times]0,+\infty[\\ F(T,x) = f(x) & x \in]0,+\infty[. \end{cases}$$

On en a déduit que l'option est simulable avec stratégie autofinancée

$H_t = \partial_x F(t, S_t)$ actif risqué en t

$H_t^0 = \dfrac{F(t, S_t) - S_t \partial_x F(t, S_t)}{S_t^0}$ actif sans risque en t.

$V_t = H_t S_t + H_t^0 S_t^0 = F(t, S_t)$

$V_T = F(T, S_T) = f(S_T)$

$d\tilde{V}_t = \sigma H_t \tilde{S}_t dW_t \longrightarrow$ condition suffisante d'autofinancement.

preuve du lemme : On pose $\theta = T - t$ $\qquad W_\theta \sim \mathcal{N}_1(0,\theta)$ sous $\mathbb{P}^*$

$$F(t,x) = e^{-r\theta}\,\mathbb{E}^*\left(f\left(x\,e^{\sigma W_\theta + (r-\frac{\sigma^2}{2})\theta}\right)\right) = e^{-r\theta}\int_{\mathbb{R}} f\left(x\,e^{\sigma z + (r-\frac{\sigma^2}{2})\theta}\right) e^{-\frac{z^2}{2\theta}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi\theta}}$$

$$y = x\,e^{\sigma z + (r-\frac{\sigma^2}{2})\theta} \qquad z = \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right) \qquad dz = \frac{dy}{\sigma y}$$

$$= e^{-r\theta}\int_0^{+\infty} f(y)\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2\theta}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) + (r-\frac{\sigma^2}{2})\theta\right)^2}\frac{dy}{\sigma y\sqrt{2\pi\theta}} = e^{-r\theta}\int_0^{+\infty} f(y)\,p(\theta,x,y)\,dy$$

où $p(\theta,x,y) = \dfrac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi\theta}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2\theta}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)+(r-\frac{\sigma^2}{2})\theta\right)^2}$

$$\partial_\theta p = \boxed{-\frac{1}{2\theta}\,p} + \boxed{\frac{1}{2\sigma^2\theta^2}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right)^2 p} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sigma^2\theta}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right)p$$

$$r\,x \times \partial_x p = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sigma^2\theta x}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right)p \qquad -\frac{r}{\sigma^2\theta}$$

$$\frac{\sigma^2x^2}{2}\times\partial_{xx} p = \underset{\to\ \frac{1}{2\theta}}{\frac{1}{\sigma^2\theta x^2}}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right)p \;\boxed{-\underset{\to\ -\frac{1}{2\theta}}{\frac{1}{\sigma^2\theta x^2}}\,p} + \boxed{\underset{\to\ \frac{1}{2\sigma^2\theta}}{\frac{1}{\sigma^4\theta^2x^2}}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right)^2 p}$$

$$\boxed{\partial_\theta p = r x\,\partial_x p + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx} p}$$

$$F(t,x) = e^{-r\theta}\int_0^{+\infty} f(y)\, p(\theta,x,y)\,dy \qquad \theta = T-t$$

$$\partial_\theta p = rx\,\partial_x p + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx} p$$

$$\partial_t F(t,x) = r F(t,x) - e^{-r\theta}\int_0^{+\infty} f(y)\,\underbrace{\partial_\theta p(\theta,x,y)}_{rx\,\partial_x p(\theta,x,y) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx} p(\theta,x,y)}\,dy$$

$$= r F(t,x) - rx\,\partial_x\Big(\underbrace{e^{-r\theta}\int_0^{+\infty} f(y)\,p(\theta,x,y)\,dy}_{F(t,x)}\Big) - \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx}\Big(\underbrace{e^{-r\theta}\int_0^{+\infty} f(y)p(\theta,x,y)\,dy}_{F(t,x)}\Big)$$

$$\partial_t F(t,x) + rx\,\partial_x F(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx}F(t,x) - r F(t,x) = 0 \qquad \blacksquare$$

3) <u>cas des options européennes exotiques</u> : $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s\le t) = \sigma(W_s, s \le t)$

h payoff $\mathcal{F}_T$ mesurable ≥ 0 tq $\mathbb{E}^*(h^2) < +\infty$

ex : $h = \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t\,dt - K\right)^+ \qquad \left(S_T - \frac{1}{T}\int_0^T S_t\,dt\right)^+$

$$\left(\max_{t\in[0,T]} S_t - S_T\right)$$

Thm de représentation des martingales browniennes :

Soit $(X_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien de filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s\in[0,t])$.
Si $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}_t^X$ martingale de carré intég (ie $\mathbb{E}(M_T^2)<+\infty$), alors $\exists!\ (G_t)_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{F}_t^X$ adapté tq $\mathbb{E}\left(\int_0^T G_t^2\,dt\right)<+\infty$ et $\boxed{M_t = M_0 + \int_0^t G_s\,dX_s \quad \forall t\in[0,T]}$

NB : $M_0 = \mathbb{E}(M_t)$, $\forall t\in[0,T]$

Corollaire : Si h $\mathcal{F}_T$ mesurable tq $\mathbb{E}^*(h^2)<+\infty$ alors l'option européenne de payoff h est ~~simulable~~ réplicable et sa valeur en t est $V_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}h \mid \mathcal{F}_t\right)$.

$\rightarrow \tilde{V}_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-rT}h \mid \mathcal{F}_t\right)$

Preuve : On pose $M_t = \mathbb{E}^*(e^{-rT} h \mid \mathcal{F}_t)$ pour $t \in [0,T]$.

$\mathcal{F}_t$ mart sous $\mathbb{P}^*$ avec $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \in [0,T])$.

D'après le thm de représentation des martingales,

$\exists\ (G_t)_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{F}_t$ mes tq $\mathbb{E}^*\left(\int_0^T G_t^2\,dt\right) < +\infty$

et $\forall t \in [0,T]$, $M_t = \mathbb{E}^*(e^{-rT} h) + \int_0^t G_s\,dW_s$

i.e. $dM_t = G_t\,dW_t$.

On pose $H_t = \dfrac{G_t}{\sigma \tilde{S}_t}$ (de façon à avoir autofinancement)

et $H_t^0 = M_t - \dfrac{G_t}{\sigma \tilde{S}_t} \tilde{S}_t = M_t - \dfrac{G_t}{\sigma}$.

Alors $\tilde{V}_t = H_t \tilde{S}_t + H_t^0 = M_t$ $\quad d\tilde{V}_t = dM_t = G_t\,dW_t$

$= \sigma H_t \tilde{S}_t\,dW_t$ ~~autofinancement~~.

$V_T = e^{rT} M_T = \cancel{e^{rT}}\,\cancel{e^{-rT}} h$ On a construit un portefeuille autofinancé de replication

III Pricing des options américaines :

option américaine de maturité T et de payoff $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$

$\to$ détenteur reçoit $\varphi(S_t)$ du vendeur s'il exerce en $t \in [0,T]$.

ex : Call $\varphi(x) = (x-K)^+$ Put $\varphi(x) = (K-x)^+$.

On définit le prix de couverture initial comme

$$c_* = \inf \Big\{ c : \exists (H_t)_{t\in[0,T]} \ \mathcal{F}_t \text{ adapté tq } \mathbb{E}^*\Big(\int_0^T (H_t \tilde{S}_t)^2 dt\Big) < +\infty$$
$$\text{et } \forall t \in [0,T], \ \underbrace{c + \int_0^t H_s \sigma \tilde{S}_s dW_s}_{} \geq e^{-rt}\varphi(S_t) \Big\}$$

valeur actualisée en t du portefeuille autofinancé de valeur initiale c et qui consiste à détenir H_t actif risqué en t

Soit c dans l'ensemble et τ un temps d'arrêt à valeurs dans $[0,T]$.

$$c \geq \sup_\tau \mathbb{E}^*(e^{-r\tau}\varphi(S_\tau)) \qquad c = \mathbb{E}^*\Big(c + \int_0^\tau H_s \sigma \tilde{S}_s dW_s\Big) \geq \mathbb{E}^*\big(e^{-r\tau}\varphi(S_\tau)\big)$$

$$\boxed{c_* \geq \sup_\tau \mathbb{E}^*(e^{-r\tau}\varphi(S_\tau))}.$$

On cherche le prix à l'instant t sous la forme $v(t, S_t)$ avec la fonction de pricing v assez régulière pour appliquer la formule d'Itô.

$$dv(t,S_t) = \partial_t v(t,S_t)\,dt + \partial_x v(t,S_t)\underbrace{dS_t}_{\sigma S_t dW_t + r S_t dt} + \frac{1}{2}\partial_{xx} v(t,S_t)\underbrace{d\langle S\rangle_t}_{\sigma^2 S_t^2 dt}$$

$$(*)\; d\left(e^{-rt}v(t,S_t)\right) = -re^{-rt}v(t,S_t)\,dt + e^{-rt}dv(t,S_t) + 0.$$

$$= e^{-rt}\left(\partial_t v(t,S_t) + r S_t \partial_x v(t,S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\partial_{xx} v(t,S_t) - r v(t,S_t)\right)dt$$

$$+ e^{-rt}\sigma S_t\, \partial_x v(t,S_t)\, dW_t$$

Supposons que $\forall (t,x) \in [0,T] \times]0,+\infty[$, $\quad v(t,x) \geq \varphi(x)$

et que $\forall (t,x) \in [0,T[\times]0,+\infty[$

$$\partial_t v(t,x) + r x\, \partial_x v(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx} v(t,x) - r_t v(t,x) \leq 0.$$

$$(**)\; v(0,S_0) + \int_0^t \partial_x v(s,S_s)\,\sigma \tilde{S}_s\, dW_s = \underbrace{e^{-rt}v(t,S_t)}_{\geq e^{-rt}\varphi(S_t)} - \underbrace{\int_0^t e^{-rs}\left(\partial_t v(s,S_s) + r S_s \partial_x v(s,S_s) + \frac{\sigma^2 S_s^2}{2}\partial_{xx} v(s,S_s) - r v(s,S_s)\right)ds}_{\geq 0}$$

Alors $\boxed{v(0,S_0) \geq c_0}$ pour $H_t = \partial_x v(t,S_t)$

Thm : Supposons φ Lipschitz

$\exists\, v$ solution de l'inéquation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \max\left(\varphi(x) - v(t,x),\ \partial_t v(t,x) + \dfrac{\sigma^2 x^2}{2}\,\partial_{xx} v(t,x) + r x\,\partial_x v(t,x) - r v(t,x)\right) = 0 \\ v(T,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

et $\mathbb{E}^*\left(\int_0^T \left(\partial_x v(t,S_t)\,\tilde{S}_t\right)^2 dt\right) < +\infty$.

En outre $\boxed{c_* = v(0,S_0) = \sup_\tau \mathbb{E}^*\left(e^{-r\tau}\varphi(S_\tau)\right)}$

Preuve : On admet l'existence et on montre la formule encadrée.

On sait que $v(0,S_0) \geq c_* \geq \sup_\tau \mathbb{E}^*\left(e^{-r\tau}\varphi(S_\tau)\right)$.

Il suffit de trouver τ_* tq $\mathbb{E}^*\left(e^{-r\tau_*}\varphi(S_{\tau_*})\right) \geq v(0,S_0)$

On pose $\tau_* = \inf\{t \in [0,T] \text{ tq } v(t,S_t) = \varphi(S_t)\}$

Comme $v(T,S_T) = \varphi(S_T)$, $\tau_* \leq T$. τ_* temps d'arrêt à valeurs dans $[0,T]$.

Pour $t \in [0, \tau_*[$, $v(t, S_t) > \varphi(S_t)$

Donc $\partial_t v(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \partial_{xx} v(t, S_t) + r S_t \partial_x v(t, S_t) - r v(t, S_t) = 0$

par l'inéquation aux dérivées partielles.

$(**)$ en $\tau_* \longrightarrow$ $e^{-r\tau_*} \underbrace{v(\tau_*, S_{\tau_*})}_{\varphi(S_{\tau_*})} = v(0, S_0) + \int_0^{\tau_*} \sigma \tilde{S}_s \partial_x v(s, S_s) dW_s$

$$E^*\left(e^{-r\tau_*} \varphi(S_{\tau_*})\right) = v(0, S_0) + 0 .$$

<u>Cas du Call</u> : Si $r \geq 0$, le prix du call américain est égal à celui du call européen.

Notons $C(t, x)$ la fonction de pricing du Call européen

Elle vérifie l'EDP de Black-Scholes

$$\partial_t C(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_{xx} C(t, x) + r x \partial_x C(t, x) - r C(t, x) = 0$$

Pour $t \in [0, T)$

$C(T, x) = (x - K)^+$

Si $r \geq 0$, d'après le TD5, $\partial_t C(t, x) \leq 0 \Rightarrow C(t, x) \geq C(T, x)$

$= (x - K)^+$

C est solution de l'inéquation aux dérivées partielles.

TD 6 option sur moyenne :

Formule d'Itô multidimensionnelle : $(W_t^1, \dots, W_t^d)$ mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$ (ie les W_t^i sont des mouvements browniens réels indépendants)

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i \, ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{ik} \, dW_s^k \qquad 1 \leq i \leq n$$

n processus d'Itô.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad C^2 \qquad X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$.

$$d f(X_t) = \nabla f(X_t) \cdot dX_t + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t) \, d\langle X^i, X^j \rangle_t$$

avec $\displaystyle d\langle X^i, X^j \rangle_t = \sum_{\ell=1}^d H_t^{i\ell} H_t^{j\ell} \, dt$.

<u>NB</u> : On peut prendre $X_t^1 = t$.

1) $0 \leq h \leq \frac{1}{T}\int_0^T S_u \, du$

$$\Rightarrow h^2 \leq \left(\frac{1}{T}\int_0^T S_u \, du\right)^2 \overset{\text{Jensen}}{\leq} \frac{1}{T}\int_0^T S_u^2 \, du$$

$$\mathbb{E}^*(S_u^2) = \mathbb{E}^*\left(S_0^2 e^{2\sigma W_u + (2r-\sigma^2)u}\right) = S_0^2 e^{(2r-\sigma^2)u} \underbrace{\mathbb{E}^*(e^{2\sigma W_u})}_{e^{\frac{(2\sigma)^2 u}{2}} = e^{2\sigma^2 u}}$$

$$= S_0^2 e^{(2r+\sigma^2)u}$$

$$\mathbb{E}^*(h^2) \leq \frac{S_0^2}{T}\int_0^T e^{(2r+\sigma^2)u} \, du = \frac{S_0^2}{T} \frac{e^{(2r+\sigma^2)T} - 1}{(2r+\sigma^2)} < +\infty.$$

Donc l'option est replicable d'après le thm de representation des martingales browniennes.

Soit V_t la valeur du portefeuille de replication en $t \in [0,T]$

$(\tilde{V}_t)_{t \in [0,T]}$ est une $\mathcal{F}_t$ mart sous $\mathbb{P}^*$

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(e^{-rT} h | \mathcal{F}_t) \qquad \boxed{V_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t)}$$

2) $Y_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_u\,du = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^t S_u\,du}_{Y_t} + \frac{S_t}{T}\int_t^T \underbrace{\frac{S_u}{S_t}}_{e^{\sigma(W_u-W_t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(u-t)}}\,du$

3) $V_t = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)} h \mid \mathcal{F}_t\right)$

$= \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}\left(Y_t + \frac{S_t}{T}\int_t^T e^{\sigma(W_u-W_t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(u-t)}\,du - K\right)^+ \Big| \mathcal{F}_t\right)$

$\mathcal{F}_t$ mesurable

indep de $\mathcal{F}_t$ sous $\mathbb{P}^*$

$= v(t, S_t, Y_t)$ où

$v(t,x,y) = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}\left(y + \frac{x}{T}\int_t^T e^{\sigma(W_u-W_t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(u-t)}\,du - K\right)^+\right)$

4) On applique Itô au processus bidimensionnel t, S_t, Y_t

avec $dS_t = \sigma S_t\,dW_t + r S_t\,dt$ $\qquad dY_t = \frac{S_t}{T}\,dt$.

Seul terme de crochet non nul $\langle S, S\rangle_t = \int_0^t \sigma^2 S_u^2\,du$

$\langle S, t\rangle_t = \langle Y, t\rangle_t = \langle Y, S\rangle_t = \langle Y, Y\rangle_t = \langle t, t\rangle_t = 0.$

$$d v(t, S_t, Y_t) = \partial_t v(t, S_t, Y_t)\, dt + \partial_x v(t, S_t, Y_t)\, \underbrace{dS_t}_{\sigma S_t dW_t + r S_t dt}$$

$$+ \partial_y v(t, S_t, Y_t)\, \underbrace{dY_t}_{\frac{S_t}{T} dt} + \frac{1}{2} \partial_{xx} v(t, S_t, Y_t)\, \underbrace{d\langle S\rangle_t}_{\sigma^2 S_t^2 dt} + 0.$$

$$= \Big(\partial_t v(t, S_t, Y_t) + \partial_x v(t, S_t, Y_t)\, r S_t + \partial_y v(t, S_t, Y_t) \frac{S_t}{T}$$

$$+ \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \partial_{xx} v(t, S_t, Y_t) \Big)\, dt$$

$$+ \sigma \partial_x v(t, S_t, Y_t)\, S_t\, dW_t$$

IPP

$$d\left(e^{-rt} v(t, S_t, Y_t)\right) = v(t, S_t, Y_t)\, \underbrace{d(e^{-rt})}_{-r e^{-rt} dt} + e^{-rt} dv(t, S_t, Y_t) + 0$$

$$= e^{-rt} \Big(\partial_t v(t, S_t, Y_t) + r S_t \partial_x v(t, S_t, Y_t) + \frac{S_t}{T} \partial_y v(t, S_t, Y_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \partial_{xx} v(t, S_t, Y_t)$$

$$- r\, v(t, S_t, Y_t) \Big)\, dt$$

$$+ \sigma \partial_x v(t, S_t, Y_t)\, \tilde{S}_t\, dW_t$$

5) Pour le portefeuille de replication, $d\tilde{V}_t = \sigma H_t \tilde{S}_t\, dW_t$ (condition autofinancement actualisé)

Par unicité de la decomposition d'un processus d'Itô

$$\boxed{H_t = \partial_x v(t, S_t, Y_t)}$$

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x,y) + r x \, \partial_x v(t,x,y) + \frac{x}{T} \partial_y v(t,x,y) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_{xx} v(t,x,y) \\ \quad - r v(t,x,y) = 0 \qquad \text{for } (t,x,y) \in [0,T[\times]0,+\infty[^2 \\ v(T,x,y) = (y-K)^+ . \end{cases}$$