Ch II Mouvement brownien. Intégrale stochastique. Equations Différentielles Stochastiques

I Processus à temps continu :

espace de proba $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

def : Une famille $(X_t)_{t \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est appelée processus à valeurs dans E.

NB : A $\omega \in \Omega$, on associe la trajectoire

$$t \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow X_t(\omega).$$

La trajectoire est dite continue si cette fonction est continue. Le processus est dit continu si ses trajectoires sont continues p.s.

Filtration : $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$

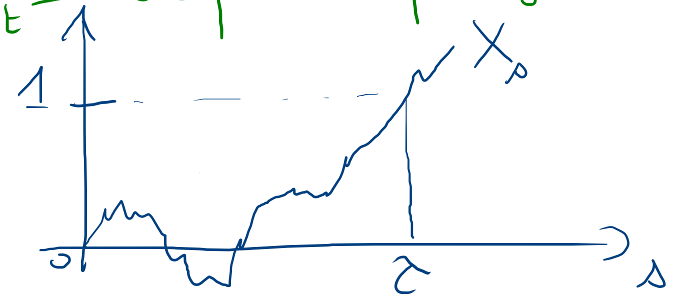
• $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si $\forall t\geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable.

ex : Si $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s\leq t)$, alors $(X_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t$-adapté.

déf : Une va $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est appelée temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si
$$\forall t\geq 0, \quad \{\tau\leq t\}\in \mathcal{F}_t.$$

ex : $(X_t)_{t\geq 0}$ processus continu $\mathcal{F}_t$-adapté tq $X_0=0$.

$$\tau(\omega) = \inf\{s\geq 0 : X_s(\omega)\geq 1\}$$



$$\{\tau \leq t\} = \{\sup_{s\in[0,t]} X_s \geq 1\} = \{\sup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} X_s \geq 1\}$$

$$= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \underbrace{\{X_s \geq 1-\tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$$

par stabilité d'~~une~~ tribu par intersection et union dénombrable

II Martingales :

déf : Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ réel $\mathcal{F}_t$-adapté est une $\mathcal{F}_t$-martingale si

i) $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}(|M_t|) < +\infty$

ii) $\forall\, 0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$

surmart ii) $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$

sous mart ii) $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$

NB : $\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_0))}_{\mathbb{E}(M_t)} = \mathbb{E}(M_0)$

l'espérance d'une mart est constante

Thm d'arrêt de Doob : Si $(M_t)_{t\geqslant 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ - mart et τ un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt tq $\exists\, T<+\infty$ avec $\mathbb{P}(\tau\leq T)=1$ alors $\mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0)$

Thm (Inégalité de Doob) : Si $(M_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale continue, alors $\forall\, t\geqslant 0$, $\mathbb{E}(\sup_{s\in[0,t]} M_s^2) \leq 4\,\mathbb{E}(M_t^2)$

III Le mouvement brownien :

1) définition :

déf : On appelle mouvement brownien standard un processus $(W_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues qui vérifie

i) $W_0 = 0$

ii) $W_{t+s} - W_s$ est indep de $\sigma(W_u, u \leq s)$ et suit $\mathcal{N}(0, t)$ pour tous $s, t \geq 0$.

NB : processus continu à accroissements indep et stationnaires

En fait tout processus continu $(X_t)_{t\geq 0}$ à accroissements indep et stationnaires s'écrit sous la forme $X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$ avec $(W_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien.

Prop : Le mouvement brownien est un processus gaussien au sens où $\forall 0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n$, $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$ est un vecteur gaussien

Preuve : $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ est un vecteur dont les coordonnées sont des gaussiennes réelles indep.

Il suit la loi $\mathcal{N}_n \left(0, \begin{pmatrix} t_1 & & (0) \\ & t_2 - t_1 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix}\right)$

Par stabilité du caractère gaussien par la transformation affine $(x_1, \dots, x_n) \to (x_1, x_2 + x_1, \dots, x_n + x_{n-1} + \dots + x_1)$, $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n})$ est un vecteur gaussien ∎

Pour $0 \le s \le t$

$$\mathrm{Cov}(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s) - \underbrace{\mathbb{E}(W_t)}_{0}\underbrace{\mathbb{E}(W_s)}_{0} = \mathbb{E}((W_t - W_s)W_s) + \underbrace{\mathbb{E}(W_s^2)}_{= \mathrm{Var}(W_s) \text{ car } \mathbb{E}(W_s) = 0}$$

$$\overset{\text{indep. accrois.}}{=} \mathbb{E}(W_t - W_s)\,\mathbb{E}(W_s) + s = s.$$

Prop : | tout processus continu gaussien $(B_t)_{t\geq 0}$ centré et tq $Cov(B_t, B_s) = \min(t,s)$ est un mouvement brownien.

def : Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. On dit que $(W_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$ - mouvement brownien si $\forall t\geq 0$ W_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable et

i) $W_0 = 0$

ii) $\forall s,t \geq 0$, $W_{t+s} - W_s$ est indep de $\mathcal{F}_s$ et suit $\mathcal{N}(0,t)$

NB : $\mathcal{F}_t$ peut contenir plus d'information que $\sigma(W_s, s\leq t)$.

2) quelques propriétés du mouvement brownien :

- $X_t = -W_t$, $Y_t = c\, W_{\frac{t}{c^2}}$ avec $c \in \mathbb{R}^*$, $Z_t = t\, W_{\frac{1}{t}}$ sont des mouvements browniens.

utilisation de la caractérisation comme processus gaussien centré avec covariance $\min(s,t)$.

Application : $\mathcal{L}(W_s \mid W_t = x)$ for $0 < s \le t$

$$\mathcal{L}(W_s \mid W_t = x) = \mathcal{L}(Z_s \mid Z_t = x) = \mathcal{L}\left(s W_{\frac{1}{s}} \mid t W_{\frac{1}{t}} = x\right)$$

$$= \mathcal{L}\Big(\underbrace{s\big(W_{\frac{1}{s}} - W_{\frac{1}{t}}\big)}_{\text{indep de } W_{\frac{1}{t}} \,\sim\, \mathcal{N}_1\left(0,\, s^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right)\right)} + s W_{\frac{1}{t}} \;\Big|\; W_{\frac{1}{t}} = \frac{x}{t}\Big)$$

$$= \mathcal{N}_1\left(\frac{s x}{t}, \frac{s(t-s)}{t}\right)$$

moments : $\lambda \in \mathbb{R}$ $t > 0$

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda W_t}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2 - 2\lambda t x + \lambda^2 t^2}{2t}} e^{+\frac{\lambda^2 t}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t}}$$

$$= e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\lambda t)^2}{2t}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t}} \underset{y = x - \lambda t}{=} e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda W_t}\right) = e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^n\, \mathbb{E}(W_t^n)}{n!} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^{2m}\, t^m}{2^m\, m!}$$

$$\mathbb{E}(W_t^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{n!\, t^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)!} & \text{si } n \text{ pair (choix } m = \frac{n}{2}\text{)} \end{cases}$$

<u>ex</u> : $\mathbb{E}(W_t^4) = \dfrac{4!\, t^2}{2^2\, 2!} = 3t^2$

3) martingales browniennes :

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien. Alors $(W_t)_{t\geq 0}$, $(X_t = W_t^2 - t)_{t\geq 0}$, $\left(Y_t = e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t}\right)_{t\geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t$ martingales.

preuve : Soit $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s) = \underbrace{\overbrace{\mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s)}^{\text{indep de } \mathcal{F}_s}}_{\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0} + \underbrace{\overbrace{\mathbb{E}(W_s \mid \mathcal{F}_s)}^{\mathcal{F}_s \text{ mes}}}_{W_s}$$

$$\mathbb{E}(W_t^2 \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left((W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right)$$

$$= \mathbb{E}\left((W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right) + 2W_s\, \mathbb{E}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s) + W_s^2$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left((W_t - W_s)^2\right)}_{t-s} + 2W_s\, \underbrace{\mathbb{E}(W_t - W_s)}_{0} + W_s^2 \quad \text{ie} \quad \mathbb{E}(W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s) = W_s^2 - s.$$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda W_t} \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda(W_t - W_s)} e^{\lambda W_s} \mid \mathcal{F}_s\right) = e^{\lambda W_s}\, \mathbb{E}\left(e^{\lambda(W_t - W_s)}\right)$$

$$= e^{\lambda W_s}\, \mathbb{E}\left(e^{\lambda W_{t-s}}\right) = e^{\lambda W_s} e^{\lambda^2 \frac{t-s}{2}} \quad \text{ie} \quad \mathbb{E}\left(e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t} \mid \mathcal{F}_s\right) = e^{\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2}s}$$

$\blacksquare$

Sommes de Riemann et mvt brownien :

1) $$\frac{1}{2}\left(W_T^2 - \sum_{k=1}^{N}\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cancel{W_{t_k}^2} - W_{t_{k-1}}^2 - \cancel{W_{t_k}^2} - W_{t_{k-1}}^2 + 2W_{t_k}W_{t_{k-1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} W_{t_{k-1}}\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)$$

2) $$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left(\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^2\right) \overset{\text{centré}}{=} \sum_{k=1}^{N} Var\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(t_k-t_{k-1}\right) = t_N - t_0 = T$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{N}\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^2 - T\right)^2\right) = Var\left(\sum_{k=1}^{N}\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^2\right)$$

$$\overset{\text{indep accroiss}}{=} \sum_{k=1}^{N} Var\left(\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^2\right) = \sum_{k=1}^{N}\left(\mathbb{E}\left(\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^4\right) - \left(\mathbb{E}\left(\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^2\right)\right)^2\right)$$

$$W_{t_k}-W_{t_{k-1}} \overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{t_k-t_{k-1}}\; G$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(3\left(t_k-t_{k-1}\right)^2 - \left(t_k-t_{k-1}\right)^2\right) = 2\sum_{k=1}^{N}\left(t_k-t_{k-1}\right)^2 = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{T}{N}\right)^2$$

$$= \frac{2T^2}{N}$$

3) $$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{\ell=1}^{N} W_{t_{\ell-1}}\left(W_{t_\ell}-W_{t_{\ell-1}}\right)-\frac{1}{2}\left(W_T^2-T\right)\right)^2\right)$$

$$\underset{1)}{=}\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{2}T-\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{N}\left(W_{t_\ell}-W_{t_{\ell-1}}\right)^2\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{\ell=1}^{N}\left(W_{t_\ell}-W_{t_{\ell-1}}\right)^2-T\right)^2\right)=\frac{2T^2}{4N}=\frac{T^2}{2N}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0.$$

$$\int_0^T W_s\,dW_s=\frac{1}{2}\left(W_T^2-T\right).$$

4) Soit $f:[0,T]\to\mathbb{R}$ C^1 dérivées finies tq $f(0)=0$.

$$\sum_{\ell=1}^{N}\left(f(t_\ell)-f(t_{\ell-1})\right)^2\le\underbrace{\sup_{t\in[0,T]}\left(f'(t)\right)^2\sum_{\ell=1}^{N}\underbrace{\left(t_\ell-t_{\ell-1}\right)^2}_{\left(\frac{T}{N}\right)^2}}_{\frac{T^2}{N}}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$$

$$\underbrace{\sum_{\ell=1}^{N} f(t_{\ell-1})\left(f(t_\ell)-f(t_{\ell-1})\right)}_{\approx\sum_{\ell=1}^{N} f(t_{\ell-1})f'(t_{\ell-1})(t_\ell-t_{\ell-1})}\overset{\text{comme en 1)}}{=}\frac{1}{2}\left(f^2(T)-\sum_{\ell=1}^{N}\left(f(t_\ell)-f(t_{\ell-1})\right)^2\right)$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{2}f^2(T)$$

$$\longrightarrow\int_0^T ff'(t)\,dt=\frac{1}{2}\left[f^2\right]_0^T=\frac{1}{2}f^2(T).$$

5)

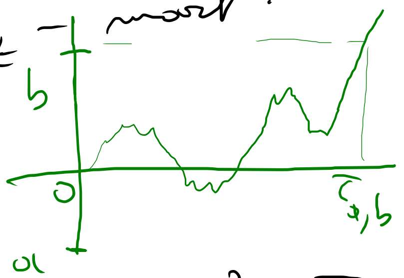
$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{N} H_{k-1}\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\mathbb{E}\left(H_{k-1}^2\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^2\right)}_{\text{indep } \mathbb{E}(H_{k-1}^2)\,\mathbb{E}\left(\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^2\right) = \mathbb{E}(H_{k-1}^2)(t_k-t_{k-1})}$$

$$t_k - t_{k-1} = \frac{T}{N}$$

$$+\,2\sum_{1\le k<l\le N} \underbrace{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\underbrace{H_{k-1}\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)H_{l-1}}_{\mathcal{F}_{t_{l-1}}\text{ mes}}\underbrace{\left(W_{t_l}-W_{t_{l-1}}\right)}_{\text{indep } \mathcal{F}_{t_{l-1}}}\,\middle|\,\mathcal{F}_{t_{l-1}}\right)\right]}_{\mathbb{E}\left(H_{k-1}\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)H_{l-1}\right)\underbrace{\mathbb{E}\left(W_{t_l}-W_{l-1}\right)}_{0}}$$

Martingales browniennes et temps d'attente :

1) $(X_t)_{t\geq 0}$ et $\left(e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t}\right)_{t\geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t$-mart.



2) $\tau_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : W_t \notin]a,b[\}$.

$$\{\tau_{a,b}\le t\} = \left\{\sup_{s\in[0,t]} W_s \geq b\right\} \cup \left\{\inf_{s\in[0,t]} W_s \le a\right\}$$

$$= \left\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{q\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \overbrace{\left\{W_q \geq b-\frac{1}{n}\right\}}^{\in\mathcal{F}_t}\right\} \cup \left\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{q\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \underbrace{\left\{W_q\le a+\frac{1}{n}\right\}}_{\in\mathcal{F}_q\subset\mathcal{F}_t}\right\} \in \mathcal{F}_t$$

$$\mathbb{P}(W_t \notin]a,b[) = \mathbb{P}\left(\frac{W_t}{\sqrt{t}} \notin \left]\frac{a}{\sqrt{t}}, \frac{b}{\sqrt{t}}\right[\right) = \mathbb{P}\left(G \notin \left]\frac{a}{\sqrt{t}}, \frac{b}{\sqrt{t}}\right[\right)$$ où $G \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\xrightarrow[t \to +\infty]{} \mathbb{P}(G \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(G=0) = 1.$$

$$\{W_t \notin]a,b[\} \subset \{\tau_{a,b} \leq t\} \subset \{\tau_{a,b} < +\infty\}.$$

Donc $\mathbb{P}(\tau_{a,b} < +\infty) = 1$.

3) $\nu_b = \inf\{t \geq 0 : W_t \geq b\} < +\infty$ p.s. $W_{\nu_b} = b$

$\mathbb{E}(W_{\nu_b}) = b \neq \mathbb{E}(W_0) = 0$

D'où la nécessité de borner les temps d'arrêt pour appliquer le théorème d'arrêt de Doob.

$\mathbb{E}(W_{\tau_{a,b} \wedge n}) = 0$ par le théorème d'arrêt

$W_{\tau_{a,b} \wedge n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} W_{\tau_{a,b}}$ p.s. car $\mathbb{P}(\tau_{a,b} < +\infty) = 1$

$|W_{\tau_{a,b} \wedge n}| \leq b \vee (-a)$

Par TCD, $\mathbb{E}(W_{\tau_{a,b} \wedge n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}(W_{\tau_{a,b}})$

$\mathbb{E}(W_{\tau_{a,b}}) = 0$

$$0 = a\,\mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = a) + b\,\underbrace{\mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = b)}_{1-\mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}}=a)}.$$

$$(b-a)\,\mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = a) = b$$

$$\mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = a) = \frac{b}{b-a} \qquad \mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = b) = \frac{-a}{b-a}.$$

4) Par thm d'arrêt $\mathbb{E}(X_{\tau_{a,b}\wedge n}) = \mathbb{E}(X_0) = 0$

$$\mathbb{E}(\tau_{a,b}\wedge n) = \mathbb{E}(W^2_{\tau_{a,b}\wedge n})$$

cv monotone $\big\downarrow n\to+\infty$ $\qquad$ $n\to+\infty \big\downarrow$ CVD

$$\mathbb{E}(\tau_{a,b}) = \mathbb{E}(W^2_{\tau_{a,b}}) = a^2\,\mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = a) + b^2\,\mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = b)$$

$$= \frac{a^2 b - a b^2}{b-a} = ab\,\frac{a-b}{b-a} = -ab$$

5) $\tau_b = \tau_{-b,b}$ $\qquad -W$ est un brownien

$\tau_b(-W) = \tau_b(W)$.

$$\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2 \tau_b(W)}{2}} \mathbb{1}_{\{W_{\tau_b(W)}=b\}}\right) \overset{-W \overset{\mathcal{L}}{=} W}{=} \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2 \tau_b(-W)}{2}} \mathbb{1}_{\{-W_{\tau_b(-W)}=b\}}\right)$$

$$\overset{\tau_b(-W)=\tau_b(W)}{=} \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2 \tau_b(W)}{2}} \mathbb{1}_{\{W_{\tau_b(W)}=-b\}}\right).$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_b}\right)$$

$$\underbrace{\mathbb{E}\left(e^{\lambda W_{\tau_b \wedge n} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_b \wedge n}\right)}_{} = 1 \qquad \text{Thm d'arrêt de Doob}$$

$$\left|\;\right| \leq e^{|\lambda| b}$$

$$\text{p.s.} \Big\downarrow n \to +\infty$$

$$e^{\lambda W_{\tau_b} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_b}$$

Par (cvD) $\quad 1 = \mathbb{E}\left(e^{\lambda W_{\tau_b} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_b}\right) = e^{\lambda b}\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_b} \mathbb{1}_{\{W_{\tau_b}=b\}}\right)$

$$+ e^{-\lambda b}\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_b} \mathbb{1}_{\{W_{\tau_b}=-b\}}\right)$$

$$\boxed{\lambda = \sqrt{2\theta} \Rightarrow \mathbb{E}\left(e^{-\theta\tau_b}\right) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{2\theta}\, b)}} \qquad = \operatorname{ch} \lambda b \; \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_b}\right)$$

Séance du 17/03 en classe inversée

lire le § 3.4 jusqu'à fin § 3.4.2 p55 à 64 du livre "Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance". 3ème édition