Rappels sur les modèles discrets :

$(\Omega, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$

fini

$\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$

$(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ filtration, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$; $\mathcal{F}_n$ représente l'information sur le marché à l'instant n

d+1 actifs :

- 1 actif sans risque de cours $S_n^0 > 0$ $\mathcal{F}_n$-mes à l'instant n. On suppose que $S_0^0 = 1$
- d actifs risqués : cours S_n^i du $i$ème à l'instant n $\mathcal{F}_n$ mes > 0, $i \in [\![1, d]\!]$.

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n}{S_n^0}$$ cours actualisés des actifs. NB : $\tilde{S}_n^0 = 1$

stratégie de portefeuille : $(\phi_n)_{1 \leq n \leq N}$ suite de vecteurs à valeurs $\mathbb{R}^{d+1}$

ϕ_n^i représente la quantité d'actif i détenue sur l'intervalle $[n-1, n]$.

$(\phi_n)_n$ prévisible i.e. ϕ_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ mes $\forall n$

$$V_n = \begin{cases} \phi_1 \cdot S_0 & \text{si } n=0 \\ \phi_n \cdot S_n & \text{si } n \in [\![1,N]\!] \end{cases}$$ valeur du portefeuille en n

$$\tilde{V}_n = \frac{V_n}{S^0_n} = \begin{cases} \phi_1 \cdot S_0 & \text{si } n=0 \\ \phi_n \cdot \tilde{S}_n & \text{si } n \in [\![1,N]\!] \end{cases}$$

autofinancé si $\forall n \in [\![1, N-1]\!]$, $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} S_n$ $\left(\Leftrightarrow \phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n \right)$

$\Leftrightarrow \forall n \in [\![1,N]\!]$, $V_n = V_0 + \sum_{\ell=1}^{n} \phi_\ell \cdot \underbrace{\Delta S_\ell}_{S_\ell - S_{\ell-1}}$ $\Leftrightarrow \forall n$, $\tilde{V}_n = V_0 + \sum_{\ell=1}^{n} \phi_\ell \cdot \Delta \tilde{S}_\ell$

admissible : autofinancé + $\forall n$, $\mathbb{P}(V_n \geq 0) = 1$

arbitrage : admissible tq $V_0 = 0$ et $\mathbb{P}(V_N > 0) > 0$.

def : le marché est dit viable s'il n'y a pas de stratégie d'arbitrage

Thm : | viabilité $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\mathbb{P}^*$ equivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les $(\tilde{S}^i_n)_{0 \leq n \leq N}$ sont des $\mathcal{F}_n$ mart pour $0 \leq i \leq d$.

$\mathbb{P}^*$ proba mart equiva ou risque neutre

2) marché complet :

déf : le marché est dit complet si toute option définie par son payoff h $\mathcal{F}_N$ mes ≥ 0 est simulable au sens où il existe une stratégie admissible de valeur $V_N = h$ en N

ex : $h = (S^1_N - K)_+$ Call sur 1er actif risqué

$= \left(K - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S^1_n\right)_+$ Put sur moyenne ou asiatique sur 1er actif risqué

$= (K - S^1_N \wedge S^2_N)_+$ Put best of.

NB : Dans un marché viable, pour qu'une option soit simulable, il suffit qu'il existe une stratégie autofinancée tq $V_N = h$

Soit $\mathbb{P}^*$ proba mart equiv $(\tilde{V}_n)_n$ est une $\mathcal{F}_n$-mart sous $\mathbb{P}^*$

$\tilde{V}_n = E^*(\tilde{V}_N | \mathcal{F}_n) = E^*\left(\frac{h}{S^0_N} \middle| \mathcal{F}_n\right) \geq 0$ $\mathbb{P}^*$ p.s donc $\mathbb{P}$ p.s.

≥ 0 $\mathbb{P}$ p.s donc $\mathbb{P}^*$ p.s

Thm : Un marché est viable et complet si et seulement si il existe une unique proba mart equiv $\mathbb{P}^*$

Preuve : Supposons le marché viable

Complétude $\overset{?}{\Longrightarrow}$ unicité proba mart equiv

Soit $\mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ 2 probas mart equiv

Soit $\bar{\omega} \in \Omega$ et $h(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega = \bar{\omega}\}}$ $\mathcal{F}_N$ mes ≥ 0

On considère la stratégie admissible tq $V_N = h$

$(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une $\mathcal{F}_n$ - mart sous $\mathbb{P}^1$ et sous $\mathbb{P}^2$.

Donc $$V_0 = \tilde{V}_0 = \underbrace{\mathbb{E}^1(\tilde{V}_N)}_{\frac{\mathbb{P}^1(\bar{\omega})}{\cancel{S_N^0}(\bar{\omega})}} = \underbrace{\mathbb{E}^2(\tilde{V}_N)}_{\frac{\mathbb{P}^2(\bar{\omega})}{\cancel{S_N^0}(\bar{\omega})}}$$

non complétude $\overset{?}{\Longrightarrow}$ non unicité Soit $\mathbb{P}^1$ proba mart equiv

On va construire une seconde proba mart equiv $\mathbb{P}^2$.

$$V = \left\{ \phi_1 \cdot S_0 + \sum_{n=1}^{N} \phi_n \cdot \widetilde{\Delta S}_n \right\}$$ avec $(\phi_n)_{1 \le n \le N}$ prévisible tq $\forall\, 1 \le n \le N-1 \quad \phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$

espace vectoriel des valeurs actualisées terminales des stratégies autofinancées

Soit $h \geq 0$ $\mathcal{F}_N$ mes non simulable.

Comme d'après la remarque toute stratégie autofinancée de valeur terminale h est admissible, $\frac{h}{S^0_N} \notin V$

V sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^\Omega$.

On munit $\mathbb{R}^\Omega$ du produit scalaire $< X, Y > = \mathbb{E}^1(XY)$.

$\exists\, X$ non nul $\in V^\perp$. Posons $\mathbb{P}^2(\{\omega\}) = \mathbb{P}^1(\{\omega\}) \underbrace{\left(1 + \frac{X(\omega)}{2 \max_{\bar\omega \in \Omega} |X(\bar\omega)|}\right)}_{> 0}$

et montrons que $\mathbb{P}^2$ est une proba mart equiv

Comme X non nul $\mathbb{P}^2 \neq \mathbb{P}^1$.

$\sum_{\omega \in \Omega} \to$

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}^2(\{\omega\}) = \mathbb{E}^1\left(1 + \frac{X}{2 \max_{\bar\omega \in \Omega} |X(\bar\omega)|}\right) = 1 + \frac{1}{2 \max_{\bar\omega \in \Omega} |X(\bar\omega)|} \underbrace{\mathbb{E}^1(X1)}_{=0}$$

Soit $c \in \mathbb{R}$

en choisissant $\phi^0_n = c \ \forall n$, $\phi^i_n = 0 \ \forall i \in [\![1,d]\!] \ \forall n \Rightarrow c \in V$

Montrons que $\mathbb{P}^2$ proba mart :

Soit $\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^d \end{pmatrix}$ $\mathcal{F}_{n-1}$ mes.

$\Psi . \Delta \tilde{S}_n$ On veut $\mathbb{E}^2(\Psi . \Delta \tilde{S}_n) = 0$ $\left(\Rightarrow \forall\, 1 \leq i \leq d \quad \mathbb{E}^2(\tilde{S}^i_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \tilde{S}^i_{n-1} \right)$

$$\mathbb{E}^2(\Psi . \Delta \tilde{S}_n) = \mathbb{E}^1\left(\Psi . \Delta \tilde{S}_n \left(1 + \frac{X}{2 \max_{\bar{\omega} \in \Omega} |X(\bar{\omega})|}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}^1(\Psi . \Delta \tilde{S}_n)}_{0 \text{ car } \mathbb{P}^1 \text{ proba mart}} + \frac{1}{2 \max_{\bar{\omega} \in \Omega} |X(\bar{\omega})|} \mathbb{E}^1(\Psi . \Delta \tilde{S}_n X) = 0$$

Montrons que $\Psi . \Delta \tilde{S}_n \in \mathcal{V}$ On choisit $\phi^0_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n-1 \\ -\Psi . \tilde{S}_{n-1} & \text{si } k = n \\ \Psi . \Delta \tilde{S}_n & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$

$$\phi^i_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n-1 \\ \psi^i & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$$

Pour ce choix

$$\phi_1 . S_0 + \sum_{k=1}^{N} \phi_k . \Delta \tilde{S}_k = \Psi . \Delta \tilde{S}_n$$

Donc $\Psi . \Delta \tilde{S}_n \in \mathcal{V}$ et $\mathbb{E}^1(\Psi . \Delta \tilde{S}_n X) = 0$ ∎

3) évaluation et couverture des options dans un marché viable et complet :

Soit h $\mathcal{F}_N$ mes ≥ 0 le payoff d'une option européenne.
Comme le marché est complet, il existe une stratégie admissible de valeur terminale $V_N = h$.

Soit $\mathbb{P}^*$ l'unique proba mart équiv
$(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une $\mathcal{F}_n$-mart sous $\mathbb{P}^*$

$$\tilde{V}_n = \mathbb{E}^*\left(\tilde{V}_N \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n\right)$$

$$\boxed{V_n = S_n^0 \, \mathbb{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n\right)}$$

Par AOA la valeur de l'option en n est égale à V_n.

Partant de V_0 et en suivant la stratégie, on couvre l'option.
$V_0 = \mathbb{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$

4) Cas d'un marché viable et non complet :

Soit $\mathcal{M}_e(\mathbb{P})$ l'ensemble des probas mart equiv. h $F_N \geq 0$ n'est pas nécessairement simulable.

Mais il existe des stratégies autofinancées de sur couverture. $V_N \geq h$

ex déterminer $\max_{\bar{\omega} \in \Omega} \frac{h(\bar{\omega})}{S^0_N(\bar{\omega})}$ actif sans risque à tout instant et pas d'actif risqué !

en N on obtient $S^0_N(\omega) \max_{\bar{\omega} \in \Omega} \frac{h(\bar{\omega})}{S^0_N(\bar{\omega})} \geq \cancel{S^0_N}(\omega) \frac{h(\omega)}{\cancel{S^0_N}(\omega)}$

prix de vente : $P_V = \inf \{ V_0$ sur les stratégies autofinancées de surcouverture$\}$.

Pour une stratégie auto φ de sur couv et pour $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e(\mathbb{P})$,

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_N) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V_N}{S^0_N}\right) \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{h}{S^0_N}\right)$$

En prenant sup $\mathbb{Q}$ et inf V_0 $\quad P_V \geq \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_e(\mathbb{P})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{h}{S^0_N}\right)$

Thm : $P_V = \sup_{Q \in \mathcal{M}_e(\mathbb{P})} \mathbb{E}^{Q}\left(\frac{h}{S^0_N}\right)$ décomposition optionnelle

et il existe une stratégie admissible de surcouverture de valeur init P_V.

si l'option est simulable, il existe une stratégie V_N admissible tq $V_N = h$. Alors $\forall Q \in \mathcal{M}_e(\mathbb{P})$, $\mathbb{E}^{Q}\left(\frac{h}{S^0_N}\right) = V_0$

Prop : L'option est simulable $\overset{(1)}{\iff}$ $\mathbb{E}^{Q}\left(\frac{h}{S^0_N}\right)$ ne dépend pas de $Q \in \mathcal{M}_e(\mathbb{P})$ $^{(2)}$

$\iff \exists Q_0 \in \mathcal{M}_e(\mathbb{P})^{(3)}$, tq $\mathbb{E}^{Q_0}\left(\frac{h}{S^0_N}\right) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_e(\mathbb{P})} \mathbb{E}^{Q}\left(\frac{h}{S^0_N}\right)$

preuve : (1) $\Rightarrow$ (2) vu juste avant

(2) $\Rightarrow$ (3) clair

(3) $\Rightarrow$ (1) On considère la stratégie de surcouverture de valeur init P_V donnée par le thm $\mathbb{E}^{Q_0}\left(\frac{V_N}{S^0_N}\right) = P_V = \mathbb{E}^{Q_0}\left(\frac{h}{S^0_N}\right)$

$$\mathbb{E}^{Q_0}\Big(\underbrace{\frac{V_N - h}{S^0_N}}_{\geq 0}\Big) = 0 \Rightarrow Q^0(V_N = h) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(V_N = h) = 1.$$

$\blacksquare$

TD 1 :

Exercice 2 : Cox Ross Rubinstein

$$\mathbb{P}^*\big((T_1, \dots, T_N) = (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_N)\big) = \dots\dots$$

Pour $\omega \in \{1+a, 1+b\}^N$, $T_n(\omega) = \omega_n$

$$\mathbb{P}^*\big(\{(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_N)\}\big) = \dots\dots$$

2) a)

$$V_n = S_n^0 \, \mathbb{E}^*\left(\frac{g(S_N)}{S_N^0} \,\middle|\, \mathcal{F}_n \right) = (1+r)^{n-N} \, \mathbb{E}^*\Big(g\big(\underbrace{S_n}_{\mathcal{F}_n \text{ mes}} \overbrace{T_{n+1} \times \dots \times T_N}^{\text{indep de } \mathcal{F}_n \text{ sous } \mathbb{P}^*}\big) \,\Big|\, \mathcal{F}_n \Big)$$

$$\overset{\text{lemme}}{=} v(n, S_n)$$

où $v(n, x) = (1+r)^{n-N} \, \mathbb{E}^*\big(g(x \times T_{n+1} \times \dots \times T_N) \big)$

$T_k \geq 1 + a > 0$ donc $x \to x \times T_{n+1} \times \dots \times T_N \nearrow$

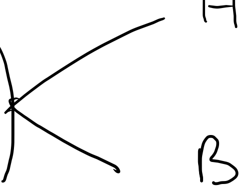
Par croissance de g et l'espérance, $x \to v(n, x) \nearrow$

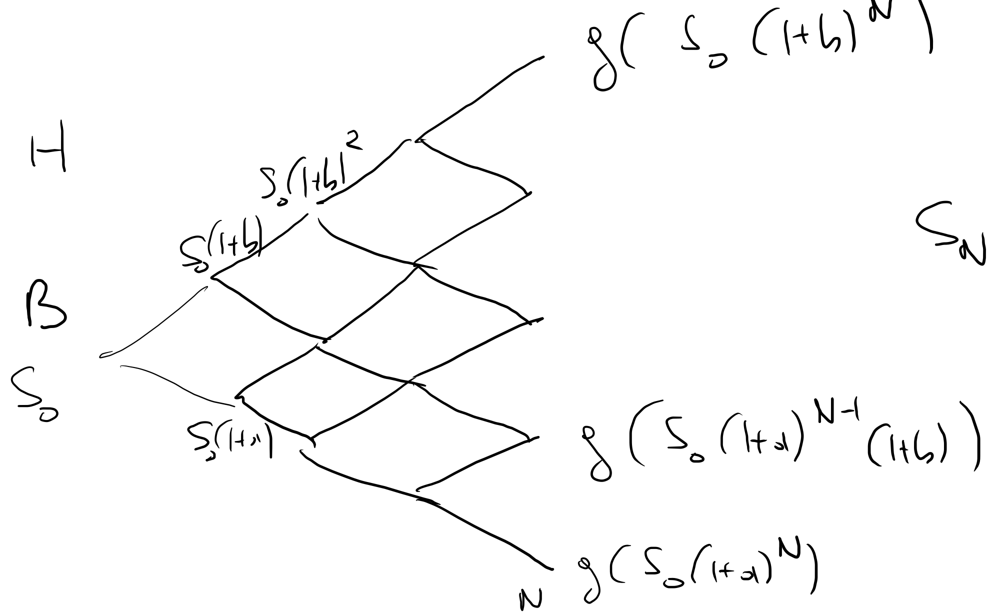
$$\nu = \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{1}_{\{T_k = 1+a\}} \qquad \nu \sim \mathcal{B}\left(N-n, \frac{b-r}{b-a}\right) \text{ sous } \mathbb{P}^*$$

$$v(n,x) = (1+r)^{n-N}\, \mathbb{E}^*\left(g\left(x\, \overbrace{T_{n+1}\times\cdots\times T_N}^{(1+a)^{\nu}(1+b)^{N-n-\nu}} \right)\right)$$

$$= (1+r)^{n-N} \sum_{k=0}^{N-n} \binom{N-n}{k} \left(\frac{b-r}{b-a}\right)^{k} \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^{N-n-k} g\left(x(1+a)^{k}(1+b)^{N-n-k}\right)$$

$$\frac{1}{1+r} \times \left(\frac{b-r}{b-a} \times B + \frac{r-a}{b-a} \times H \right)$$





$$S_N = S_0\, T_1 \cdots T_N$$

2) b) $\underbrace{\phi_{n+1}}_{\mathcal{F}_n} S_{n+1} + \underbrace{\phi^0_{n+1}}_{\mathcal{F}_n} (1+r)^{n+1} = v(n+1, S_{n+1})$

valeur du portefeuille de couverture est égale à la valeur de l'option en n+1

$\phi_{n+1} S_n \overset{(1+b)}{(1+a)} + \phi^0_{n+1} (1+r)^{n+1} = v(n+1, S_n \overset{(1+b)}{(1+a)})$

$\phi_{n+1} S_n (b-a) = v(n+1, S_n(1+b)) - v(n+1, S_n(1+a))$

$$\phi_{n+1} = \frac{v(n+1, S_n(1+b)) - v(n+1, S_n(1+a))}{S_n(b-a)}$$

On peut calculer ϕ^0_{n+1}

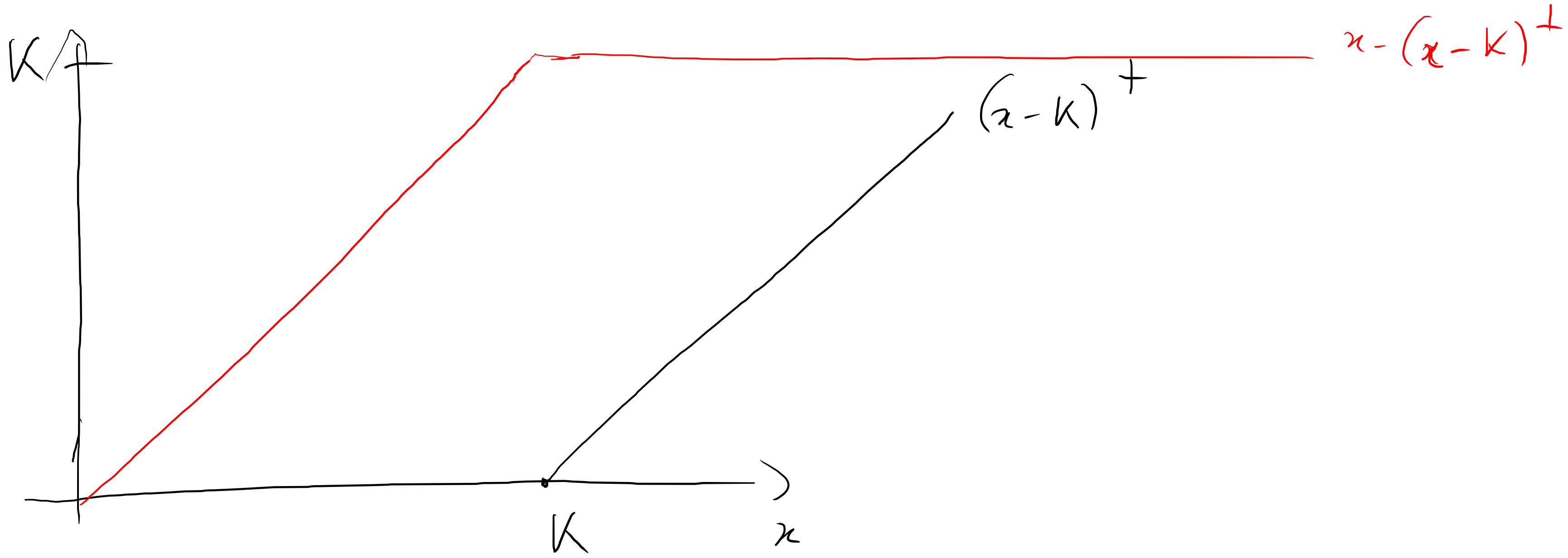
Si $g \nearrow$, $x \mapsto v(n+1, x) \nearrow$ et donc $\phi_{n+1} \geq 0$.

c) Supposons $x \longmapsto \alpha x - g(x) \geq 0 \nearrow$. Par linéarité ϕ^f_{n+1} en notant, la qtté actif risqué sur $[n, n+1]$ pour couvrir l'option $f(S_N)$.

$\phi^{\alpha x - g}_{n+1} = \phi^{\alpha x}_{n+1} - \phi^g_{n+1} = \alpha - \phi^g_{n+1}$

Comme d'après b) $\phi^{\alpha x - g}_{n+1} \geq 0$, on en déduit que $\phi^g_{n+1} \leq \alpha$

d) Pour le call $\alpha = 1$ marche et $\phi^{call}_{n+1} \in [0,1]$.



K
K
x
$(x-K)^+$
$x-(x-K)^+$