ch IV

Modèle de Black - Scholes

I Description du modèle

1) le modèle :

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on se donne $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s\leq t)$

- 1 actif sans risque $S_t^0 = e^{rt}$
- 1 actif risqué : $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$

S_0 cours aujourd'hui > 0 déterministe.

σ : volatilité > 0 mesure l'amplitude des variations aléatoires du cours

$\mu \in \mathbb{R}$: paramètre de tendance

$$\boxed{dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt}$$

Propriété : Pour $0 \leq u \leq t$ $\dfrac{S_t - S_u}{S_u} = e^{\sigma(B_t - B_u) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-u)} - 1$

est indep de $\mathcal{F}_u$ et de loi ne dépendant que de $t-u$

modèle à accroissements relatifs indep et stationnaires et à trajectoires continues. C'est le seul !

Prix actualisé de l'actif risqué :

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0} = S_0 e^{\sigma B_t + (\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

$$= S_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

pour $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$

2) Une proba mart équivalente :

Si $\mathbb{P}^*$ est une proba équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t)_{t \in [0,T]}$ est un mouvement brownien alors c'est une proba $\mathbb{P}^*$ mart équivalente

$\left(\tilde{S}_t = S_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}\right)_{t \geq 0}$ exponentielle

déf : 2 probas $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}$ sont dites équivalentes si elles ont mêmes ensembles p.s. et même ensembles négligeables
ie $\mathbb{P}(A)=0 \iff \mathbb{Q}(A)=0$.

<u>Changement de proba</u> : Soit Z va, $\mathcal{F}$ mes tq $\mathbb{P}(Z\geq 0)=1$ et $\mathbb{E}(Z)=1$. On peut définir une nouvelle proba $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(1_A Z)$

exo : vérifier que $\mathbb{Q}$ proba sur $(\Omega,\mathcal{F})$

Pour X va ≥ 0 ou tq ZX intég $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X)=\mathbb{E}(XZ)$

On dit que $\mathbb{Q}$ possède la densité Z par rapport à $\mathbb{P}$ et on note $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z$.

Si $\mathbb{P}(A)=0$, alors $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(\underbrace{1_A Z}_{=0 \ \mathbb{P}\text{ p.s.}}) = 0$

$\mathbb{Q}(\{Z=0\}) = \mathbb{E}(1_{\{Z=0\}} Z) = 0$.

- Si $\mathbb{P}(Z=0)>0$ alors $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas équivalentes

$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{Z}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{Z}1_{\{Z>0\}}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}1_{\{Z>0\}}Z\right) = \mathbb{E}(1_{\{Z>0\}}) = \mathbb{P}(Z>0)$

Si $\mathbb{P}(Z>0)=1$ alors $E^{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{Z}\right)=1$.

et $\mathbb{P}$ possède la densité $\frac{1}{Z}$ / $\mathbb{Q}$ $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}=\frac{1}{Z}$.

$\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont equivalente ssi $\mathbb{P}(Z>0)=1$

Soit $\mathbb{R}(A)=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(1_A\frac{1}{Z}\right)=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(1_A\frac{1}{Z}1_{\{Z>0\}}\right)$

$$= \mathbb{E}\left(1_A\frac{1}{Z}1_{\{Z>0\}}Z\right)=\mathbb{E}\left(1_A 1_{\{Z>0\}}\right)$$

$$=\mathbb{E}(1_A)=\mathbb{P}(A).$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(1_A\frac{1}{Z}\right) = \int_\Omega 1_A(\omega)\underbrace{\frac{1}{Z}(\omega)\,d\mathbb{Q}(\omega)}_{d\mathbb{P}(\omega)}$$

Thm: Girsanov | Sous la proba $\mathbb{P}^*$ tq $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}=e^{-\alpha B_T-\frac{\alpha^2}{2}T}$

alors $(W_t=B_t+\alpha t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien

NB: pour $\alpha=\frac{\mu-r}{\sigma}$ on obtient que $\mathbb{P}^*$ proba mort equivalente

Preuve : Soit $0 \le s \le t \le T$ $\quad u, v \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}^*\left(e^{iuW_s + iv(W_t - W_s)}\right) = \mathbb{E}\Big(\underbrace{e^{iu(B_s+\alpha s)}\, e^{iv(B_t - B_s + \alpha(t-s))}}_{\mathcal{F}_t\text{ mes}}\ \underbrace{\mathbb{E}\left(e^{-\alpha B_T - \frac{\alpha^2}{2}T} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right)}_{e^{-\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}}\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(e^{(iu-\alpha)B_s}\, e^{iu\alpha s - \frac{\alpha^2}{2}s}\, e^{(iv-\alpha)(B_t - B_s)}\, e^{iv\alpha(t-s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)}\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(e^{(iu-\alpha)B_s}\, e^{iu\alpha s - \frac{\alpha^2}{2}s}\Big) \times \mathbb{E}\Big(e^{(iv-\alpha)(B_t - B_s)}\, e^{iv\alpha(t-s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)}\Big)$$

indep de B_s et $B_t - B_s$ sous $\mathbb{P}$

$u = 0$ cours du 10/03 1ère année fonction caractéristique gaussienne

$\alpha = 0 \rightarrow$

$$= e^{iu\alpha s - \frac{\alpha^2}{2}s}\, e^{\frac{(iu-\alpha)^2}{2}s} \times e^{iv\alpha(t-s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)}\, e^{\frac{(iv-\alpha)^2}{2}(t-s)}$$

$$= e^{-\frac{u^2}{2}s} \times e^{-\frac{v^2}{2}(t-s)}$$

Sous $\mathbb{P}^*$, $\left.\begin{array}{l} W_s \sim \mathcal{N}_1(0, s) \\ W_t - W_s \sim \mathcal{N}_1(0, t-s) \end{array}\right)$ indep

se généralise à plus d'accroissements

Donc $(W_t)_{t \in [0,T]}$ $\mathbb{P}^*$ mouvement brownien.

$\blacksquare$

II Pricing des options européennes :

1) stratégies autofinancées et admissibles :

(H^0_t, H_t) $\mathcal{F}_t$ mes

H^0_t quantité d'actif sans risque en t

H_t quantité d'actif risqué en t

$$V_t = H^0_t S^0_t + H_t S_t$$ valeur du portefeuille en t.

autofinancement :

$$dV_t = H^0_t \underbrace{dS^0_t}_{re^{rt}dt} + H_t \underbrace{dS_t}_{\sigma S_t dB_t + \mu S_t dt \\ = \sigma S_t dW_t + r S_t dt}.$$

en discret

$$\Delta V_{n+1} = \phi_{n+1} \cdot \Delta S_{n+1}$$

déf : Une stratégie est dite autofinancée si $(H^0_t, H_t)_{t\in[0,T]}$

est $\mathcal{F}_t$ adaptée et

i) $\mathbb{P}\left(\int_0^T |H^0_t|\,dt + \int_0^T H_t^2\,dt < \infty\right) = 1$

ii) $\forall t \in [0,T]$, $V_t = V_0 + \int_0^t H^0_s\,dS^0_s + \int_0^t H_s\,dS_s$ p.s.

Prop : On suppose i).
Alors la stratégie est autofinancée $\iff d\tilde{V}_t = \sigma H_t \tilde{S}_t dW_t$

où $\tilde{V}_t = \frac{V_t}{S_t^0} = e^{-rt} V_t$

preuve : $\Rightarrow$) $dV_t = H_t^0 \, d\overbrace{S_t^0}^{r S_t^0 dt} + H_t \, d\overbrace{S_t}^{\sigma S_t dW_t + r S_t dt}$.

$\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$ $\quad d\tilde{V}_t \overset{IPP}{=} e^{-rt} dV_t + V_t \, de^{-rt} + 0$

$= e^{-rt}\left(H_t^0 \cancel{r S_t^0} dt + H_t \left(\sigma S_t dW_t + \cancel{r S_t dt}\right)\right)$

$- r e^{-rt} \left(\cancel{H_t^0 S_t^0} + \cancel{H_t S_t}\right) dt$

$= H_t e^{-rt} \sigma S_t dW_t = \sigma H_t \tilde{S}_t dW_t$.

$\Leftarrow$ exo

$\square$.

déf : Une stratégie est dite admissible si elle est autofinancée et tq

i) $\forall t \in [0,T]$, $\mathbb{P}(V_t \geq 0) = 1$

ii) $\mathbb{E}^*\left(\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t^2\right) < +\infty$.

ii) est une condition technique qui assure que $(\tilde{V}_t)_{t\in[0,T]}$ qui vérifie $d\tilde{V}_t = \sigma H_t \tilde{S}_t \, dW_t$ d'après la proposition est une mart sous $\mathbb{P}^*$.

Prop : Le marché est viable : il n'existe pas de stratégie admissible tq $\mathbb{P}(V_T > 0) > 0$ et $V_0 = 0$

preuve : Soit une stratégie admissible tq $V_0 = 0$.

$\mathbb{P}(V_T \geq 0) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}^*(\tilde{V}_T \geq 0) = 1$ par équivalence de $\mathbb{P}^*$ et $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$

$\mathbb{E}^*(\tilde{V}_T) = \tilde{V}_0 = V_0 = 0$ donc $\mathbb{P}^*(\tilde{V}_T = 0) = 1$ et $\mathbb{P}(V_T = 0) = 1$ par équivalence de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$

option européenne d'échéance T : définie par son payoff

h $\mathcal{F}_T$ mes ≥ 0

ex : $h = (S_T - K)^+$

Call

$h = \left(K - \frac{1}{T}\int_0^T S_t \, dt\right)^+$

put sur moyenne ou asiatique

déf : L'option est dite réplicable s'il existe une stratégie admissible tq $V_T = h$

Dans ce cas $\tilde{V}_t = E^*(\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t) = E^*(e^{-rT} h \mid \mathcal{F}_t)$

valeur de l'option en t :

$$\boxed{V_t = E^*\left(e^{-r(T-t)} h \mid \mathcal{F}_t\right)}$$

2) <u>options européennes vanilles</u> : $h = f(S_T)$

où $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ continue tq $\sup_{x>0} \frac{f(x)}{1+x} < +\infty$

prix si réplicable

$$E^*\left(e^{-r(T-t)} f(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right) = E^*\left(e^{-r(T-t)} f\left(S_t e^{\sigma(W_T - W_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\right) \Big| \mathcal{F}_t\right)$$

indep de $\mathcal{F}_t$ sous $\mathbb{P}^*$

$S_u = S_0 e^{\sigma W_u + (r - \frac{\sigma^2}{2}) u}$

$\frac{S_T}{S_t} = e^{\sigma(W_T - W_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \perp \mathcal{F}_t$

$$= F(t, S_t)$$

où $F(t,x) = E^*\left(e^{-r(T-t)} f\left(x e^{\sigma W_{T-t} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\right)\right)$.

<u>Lemme</u> : La fonction $F(t,x)$ est solution de l'EDP de Black Scholes

$$\begin{cases} \partial_t F(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_{xx} F(t,x) + r x \partial_x F(t,x) - r F(t,x) = 0 & \text{pour } (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}_+^* \\ F(T,x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

<u>Prop</u> : L'option est réplicable par $H_t = \partial_x F(t, S_t)$ et $H_t^0 = e^{-rt}\left(F(t, S_t) - \partial_x F(t, S_t) S_t\right)$

preuve de la proposition :

$$V_t = H_t^0 e^{rt} + H_t S_t = \left(F(t,S_t) - \cancel{\partial_x F(t,S_t) S_t}\right) + \cancel{\partial_x F(t,S_t) S_t}$$

$$= F(t,S_t)$$

en particulier $V_T = F(T, S_T) = f(S_T) = h$

Vérifions auto-φ i.e. $d\tilde{V}_t = \sigma\, \partial_x F(t,S_t)\, \tilde{S}_t\, dW_t$ en utilisant proposition précédente

$$d\tilde{V}_t = d\left(e^{-rt} F(t,S_t)\right) = e^{-rt} \underbrace{dF(t,S_t)}_{\partial_t F(t,S_t)\,dt + \partial_x F(t,S_t)(\sigma S_t dW_t + r S_t dt) + \frac{1}{2}\partial_{xx} F(t,S_t) \times \sigma^2 S_t^2 dt} - r e^{-rt} F(t,S_t)\, dt + 0$$

$$= e^{-rt}\Big(\partial_x F(t,S_t)\, \sigma S_t\, dW_t + \cancel{\Big\{\partial_t F(t,S_t) + r S_t \partial_x F(t,S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \partial_{xx} F(t,S_t) - r F(t,S_t)\Big\}}\, dt\Big)$$

$= 0$ par l'EDP de Black-Scholes en $x = S_t$

$$= \sigma\, \partial_x F(t,S_t)\, \tilde{S}_t\, dW_t .$$

TD 5 : Formule de Black-Scholes pour le Call

1) $$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = e^{-\alpha B_T - \frac{\alpha^2}{2}T} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

$\left(W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t\right)_{t \in [0,T]}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}^*$

2) $$S_T = S_t e^{\sigma(W_T - W_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}$$

$$\mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}\left(\underbrace{S_t}_{\mathcal{F}_t \text{ mes}} e^{\sigma\underbrace{(W_T - W_t)}_{\text{indep de } \mathcal{F}_t \text{ sous } \mathbb{P}^*} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - K\right)_+ \Big| \mathcal{F}_t\right)$$

$$= C(t, S_t)$$

où $$C(t,x) = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}\left(x e^{\sigma W_{T-t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - K\right)_+\right)$$

$$= \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}\left(x e^{\sigma W_{T-t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} - K\right) \mathbb{1}_{\left\{x e^{\sigma W_{T-t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} > K\right\}}\right)$$

$$= x\mathbb{E}^*\left(e^{\sigma W_{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \mathbb{1}_{\{\quad\}}\right) - K e^{-r(T-t)} \mathbb{P}^*\left(x e^{\sigma W_{T-t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} > K\right)$$

$$\mathbb{P}^*\left(x e^{\sigma W_{T-t}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \geq K\right) \underset{\substack{W_{T-t} \overset{\mathcal{L}}{=} -W_{T-t} \\ \text{sous } \mathbb{P}^*}}{=} \mathbb{P}^*\left(x e^{-\sigma W_{T-t}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \geq K\right)$$

$$= \mathbb{P}^*\left(\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \geq \sigma W_{T-t}\right)$$

$$= \mathbb{P}^*\left(\underbrace{\frac{W_{T-t}}{\sqrt{T-t}}}_{\sim \mathcal{N}_1(0,1) \text{ sous } \mathbb{P}^*} \leq \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) = \mathcal{N}\Big(\underbrace{\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}_{d_2(T-t,\,x)}\Big)$$

$$\mathbb{E}^*\left(e^{-\sigma W_{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \mathbb{1}_{\{x e^{-\sigma W_{T-t}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \geq K\}}\right)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = e^{-\sigma W_{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}$$

$(B_s = W_s + \sigma s)_{s \leq T-t}$ est un $\widetilde{\mathbb{P}}$ brownien par Girsanov

$$= \widetilde{\mathbb{P}}\left(x e^{-\sigma B_{T-t}+\sigma^2(T-t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \geq K\right\}$$

$$= \widetilde{\mathbb{P}}\Big(\underbrace{\frac{B_{T-t}}{\sqrt{T-t}}}_{\mathcal{N}_1(0,1) \text{ sous } \widetilde{\mathbb{P}}} \leq \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) = \mathcal{N}\Big(\underbrace{\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}_{d_1(T-t,\,x)}\Big).$$

3) $C(t,x) = \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}\left(x e^{\sigma W_{T-t} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K\right)^+\right).$

$$\partial_x e^{-r(T-t)}\left(x e^{\sigma W_{T-t} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K\right)_+ = e^{\sigma W_{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \mathbb{1}_{\{x e^{\sigma W_{T-t} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \geq K\}}$$

si $x e^{\sigma W_{T-t} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \neq K$ ie $W_{T-t} \neq \frac{1}{\sigma}\left(\ln \frac{K}{x} - (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right)$ donc $\mathbb{P}^*$ p.s.

car $y \to (y-K)^+$ est derivable de derivée $\mathbb{1}_{\{y \geq K\}}$ sauf en $y=K$

$$\left|\frac{1}{h}\left\{e^{-r(T-t)}\left((x+h) e^{\sigma W_{T-t} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K\right)^+ - e^{-r(T-t)}\left(x e^{\sigma W_{T-t} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K\right)^+\right\}\right|$$

$$\leq e^{\sigma W_{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}$$

intég sous $\mathbb{P}^*$.

Par conv. $C(t,x)$ est derivable de derivée

$$\partial_x C(t,x) = \mathbb{E}^*\left(e^{\sigma W_{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \mathbb{1}_{\{x e^{\sigma W_{T-t} + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \geq K\}}\right) = \mathcal{N}(d_1(T-t,x))$$

$H_t = \partial_x C(t, S_t) \in]0,1[.$

NB: $C(t,x) = x\,\mathcal{N}(d_1(T-t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2(T-t,x))$

$x\,\partial_x \mathcal{N}(d_1(T-t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\partial_x \mathcal{N}(d_2(T-t,x)) = 0$

$$C(t,x) = x\,\mathcal{N}(d_1(T-t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\,\mathcal{N}(d_2(T-t,x)) \quad Q2)$$

$$\partial_x C(t,x) = \mathcal{N}(d_1(T-t,x)) \quad Q3)$$

$$\Rightarrow x\,\partial_x \mathcal{N}(d_1(T-t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\,\partial_x \mathcal{N}(d_2(T-t,x)) = 0$$

la dérivée première de la fonction de pricing s'appelle
en espace
le delta de l'option.

$\partial_t \longrightarrow$ theta

$\partial_{xx} \longrightarrow$ gamma

$\partial_\sigma \longrightarrow$ vega

4) Soit $\tilde{x} \geq x > 0$

$$\partial_x C(t,\tilde{x}) - \partial_x C(t,x) = \mathbb{E}^*\left(e^{\sigma W_{T-t} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\,\mathbb{1}_{\left\{\frac{K}{x} > e^{\sigma W_{T-t} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)} \geq \frac{K}{\tilde{x}}\right\}}\right)$$

≥ 0 Donc $x \to \partial_x C(t,x) \nearrow$
ie $x \to C(t,x)$ convexe.

5) $\boxed{r \geqslant 0}$

$$\begin{cases} \partial_t C(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_{xx} C(t,x) + rx\, \partial_x C(t,x) - r\, C(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}_+^* \\ C(T,x) = (x-K)_+ \quad \text{pour } x > 0 . \end{cases}$$

EDP de Black Scholes

$$\partial_t C(t,x) = -\frac{\sigma^2 x^2}{2} \underbrace{\partial_{xx} C(t,x)}_{\substack{\geqslant 0 \text{ par} \\ \text{convexité Q 4)}}} + \underset{\geqslant 0}{r} \underbrace{\Big(C(t,x) - x\, \partial_x C(t,x) \Big)}_{\underbrace{-K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2(T-t,x))}_{\leqslant 0}}$$

$\leqslant 0$

$$\begin{aligned} C(0,x) &= \mathbb{E}^*\Big(e^{-rT} \Big(x\, e^{\sigma W_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K \Big)^+ \Big) \\ &= \mathbb{E}^*\Big(\Big(x\, e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} - K e^{-rT} \Big)^+ \Big) \\ &\underset{r \geqslant 0}{\geqslant} \mathbb{E}^*\Big(\mathbb{E}^*\Big(\Big(x\, e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} - K e^{-r(T-t)} \Big)^+ \Big| \mathcal{F}_{T-t} \Big) \Big) \\ &\underset{\text{Jensen } \mathbb{E}^*(\cdot|\mathcal{F}_{T-t})}{\geqslant} \mathbb{E}^*\Big(\Big(x\, \underbrace{\mathbb{E}^*\big(e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} \big| \mathcal{F}_{T-t} \big)}_{e^{\sigma W_{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}} - K e^{-r(T-t)} \Big)^+ \Big) = C(t,x) \end{aligned}$$