Méthodes mathématiques pour la finance :
EDP de Black-Scholes

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t = \sigma((B_s)_{s\in[0,t]}))_{t\geq 0}$. On se place dans le modèle de Black-Scholes avec

- un actif sans risque de cours $S_t^0 = e^{rt}$,
- un actif risqué de cours $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$,
- une option européenne de maturité T et de fonction de payoff $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ i.e. une option qui rapporte $f(S_T)$ à son acheteur en T. La fonction de payoff est supposée continue et à croissance polynomiale i.e. telle que $\sup_{y>0} \frac{f(y)}{1+y^n} < \infty$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$.

Pour $\alpha = \frac{\mu - r}{\sigma}$, on note $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = e^{-\alpha B_T - \frac{\alpha^2}{2}T}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement Brownien. Pour $t \in [0,T]$, on a $\mathcal{F}_t = \sigma((W_s)_{s\in[0,t]})$.

Notons que le cours actualisé de l'actif risqué s'écrit $\tilde{S}_t = S_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$ si bien que $(\tilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathbb{P}^*$ martingale. Plus généralement, la valeur actualisée $(\tilde{V}_t)_{t\in[0,T]}$ du portefeuille associé à une stratégie admissible (autofinancée, positive + intégrabilité) est une $\mathbb{P}^*$ martingale. On en déduit que si l'option est réplicable i.e. s'il existe une stratégie admissible telle que $V_T = f(S_T)$ alors le prix en $t \in [0,T]$ de l'option est

$$\begin{aligned}
V_t = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}V_T|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}f(\overbrace{S_t}^{\mathcal{F}_t-\text{mesurable}} \overbrace{e^{\sigma(W_T-W_t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}}^{\text{indep. de } \mathcal{F}_t \text{ sous } \mathbb{P}^*})|\mathcal{F}_t] \\
&= F(t, S_t) \text{ où } F(t,x) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}f(xe^{\sigma(W_T-W_t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)})].
\end{aligned}$$

Lemme 1 *La fonction* $F(t,x) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}f(xe^{\sigma(W_T-W_t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)})]$ *est solution de l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes*

$$\begin{cases} \partial_t F(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial^2_{xx}F(t,x) + rx\partial_x F(t,x) - rF(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}_+^* \\ F(T,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}.$$

Démonstration : Pour $t \in [0,T]$, on note $\theta = T - t$. Lorsque $t < T$, en utilisant que $W_T - W_t \sim \mathcal{N}_1(0,\theta)$ sous $\mathbb{P}^*$ puis en effectuant le changement de variables $y = xe^{\sigma z + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta}$ d'inverse $z = -\frac{1}{\sigma}\left(\ln(\frac{x}{y}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right)$ tel que $dz = \frac{dy}{\sigma y}$, on obtient

$$\begin{aligned}
F(t,x) &= e^{-r\theta}\int_{\mathbb{R}} f(xe^{\sigma z + (r-\frac{\sigma^2}{2})\theta})e^{-\frac{z^2}{2\theta}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi\theta}} \\
&= e^{-r\theta}\int_0^{+\infty} f(y)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\theta}\left(\ln(x/y) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right)^2\right)\frac{dy}{\sigma y\sqrt{2\pi\theta}}.
\end{aligned}$$

Posons $p(\theta,x,y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi\theta}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\theta}\left(\ln(\frac{x}{y}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right)^2\right)$ la densité de probabilité en la variable y qui apparaît dans la dernière intégrale et calculons ses dérivées partielles par rapport à x (resp. θ) qui figure une seule (resp. trois) fois dans l'expression analytique

$$\partial_x p = -\frac{p}{x\sigma^2\theta}\left(\ln(x/y) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right)$$

$$\partial^2_{xx} p = \frac{p}{x^2\sigma^4\theta^2}\left(\ln(x/y) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right)^2 + \frac{p}{x^2\sigma^2\theta}\left(\ln(x/y) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right) - \frac{p}{x^2\sigma^2\theta}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\theta p &= -\frac{p}{2\theta} + \frac{p}{2\sigma^2\theta^2}\left(\ln(x/y) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right)^2 - \frac{p}{\sigma^2\theta}\left(\ln(x/y) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right)(r - \frac{\sigma^2}{2}) \\
&= \underbrace{-\frac{p}{2\theta} + \frac{p}{2\sigma^2\theta^2}\left(\ln(x/y) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right)^2 + \frac{p}{2\theta}\left(\ln(x/y) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right)}_{\frac{\sigma^2x^2}{2}\partial^2_{xx}p} \underbrace{-\frac{rp}{\sigma^2\theta}\left(\ln(x/y) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\theta\right)}_{rx\partial_x p}
\end{aligned}$$

Ainsi $\partial_\theta p = \frac{\sigma^2x^2}{2}\partial^2_{xx}p + rx\partial_x p$ pour $(\theta, x) \in [0, T[\times\mathbb{R}^*_+$. Comme $t = T - \theta$,

$$\begin{aligned}
\partial_t F(t,x) &= -\partial_\theta\left(e^{-r\theta}\int_0^{+\infty} f(y)p(\theta,x,y)dy\right) = re^{-r\theta}\int_0^{+\infty} f(y)p(\theta,x,y)dy - e^{-r\theta}\int_0^{+\infty} f(y)\partial_\theta p(\theta,x,y)dy \\
&= rF(t,x) - \int_0^{+\infty} f(y)\left(\frac{\sigma^2x^2}{2}\partial^2_{xx}p(\theta,x,y) + rx\partial_x p(\theta,x,y)\right)dy \\
&= rF(t,x) - \frac{\sigma^2x^2}{2}\partial^2_{xx}\int_0^{+\infty} f(y)p(\theta,x,y)dy - rx\partial_x\int_0^{+\infty} f(y)p(\theta,x,y)dy \\
&= rF(t,x) - \frac{\sigma^2x^2}{2}\partial^2_{xx}F(t,x) - rx\partial_x F(t,x),
\end{aligned}$$

où l'on admet que l'hypothèse de croissance faite sur la fonction de payoff f permet de justifier les trois échanges de dérivées et d'intégrales par convergence dominée. $\square$