Méthodes mathématiques pour la finance :

TD 1

Exercice 1

On considère que les placements et emprunts à la banque se font au taux continu $r > 0$ (1 euro à l'instant 0 donne e^{rt} euros en t) et on note $C(T, K)$ le prix à l'instant 0 du call d'échéance T et strike K portant sur un actif risqué. Montrer par absence d'arbitrage que

1. $\forall T \geq 0,\ \forall K_1, K_2 > 0,\ 2C\left(T, \frac{K_1+K_2}{2}\right) \leq C(T, K_1) + C(T, K_2)$.
2. $\forall K > 0,\ \forall 0 \leq T_1 \leq T_2,\ C(T_1, K) \leq C\left(T_2, Ke^{r(T_2-T_1)}\right)$.

Exercice 2

On se place dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein (CRR) à N périodes : on dispose d'un actif sans risque $(S_n^0 = (1+r)^n)_{0 \leq n \leq N}$ qui évolue au taux r et un actif risqué $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$ qui vérifie

$$\forall 0 \leq n \leq N-1,\ \frac{S_{n+1}}{S_n} = T_{n+1} \in \{1+a, 1+b\}$$

où $-1 < a < r < b$. Plus précisément, on munit $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$ de la tribu discrète $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$ t.q. $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$. Pour $1 \leq n \leq N$ et $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega$, on pose $T_n(\omega) = \omega_n$. Enfin, on note $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \ldots, T_n)$.

1. (a) Montrer que si $\mathbb{P}^*$ est une probabilité martingale équivalente à $\mathbb{P}$, alors

   $$\forall 1 \leq n \leq N,\ \mathbb{E}^*(T_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 1 + r$$

   et en déduire $\mathbb{E}^*(1_{\{T_n=1+a\}} | \mathcal{F}_{n-1})$ et $\mathbb{E}^*(1_{\{T_n=1+b\}} | \mathcal{F}_{n-1})$.

   (b) En déduire $\mathbb{E}^*(1_{\{T_1=\bar{\omega}_1\}} \times \ldots \times 1_{\{T_N=\bar{\omega}_N\}})$ pour $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_N) \in \Omega$. Conclure que le marché est viable et complet.

2. On considère une option européenne d'échéance N et de fonction de payoff $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ i.e. une option qui rapporte $g(S_N)$ à l'instant N. On note V_n la valeur de cette option à l'instant n et $(\phi_n^0, \phi_n)_{1 \leq n \leq N}$ la stratégie de couverture associée.

   (a) On rappelle que si on se donne une tribu $\mathcal{F}$, une variable X $\mathcal{F}$-mesurable et une variable Y indépendante de $\mathcal{F}$, on a $\mathbb{E}(f(X,Y)|\mathcal{F}) = \psi(X)$ pour $\psi(x) = \mathbb{E}(f(x,Y))$. En déduire que $V_n = v(n, S_n)$ pour une fonction $v(n,x)$ que l'on précisera. Que peut-on dire de $x \to v(n,x)$ si g est croissante ?
   Quelle est la loi de $\nu = \sum_{k=n+1}^{N} 1_{\{T_k=1+a\}}$ sous $\mathbb{P}^*$? En déduire que

   $$v(n,x) = (1+r)^{n-N} \sum_{m=0}^{N-n} \binom{N-n}{m} \left(\frac{b-r}{b-a}\right)^m \left(\frac{r-a}{b-a}\right)^{N-n-m} g\left(x(1+a)^m(1+b)^{N-n-m}\right).$$

   (b) Montrer que la quantité d'actif risqué à détenir sur la période $[n, n+1]$ pour couvrir l'option est donnée par

   $$\phi_{n+1} = \frac{v(n+1, S_n(1+b)) - v(n+1, S_n(1+a))}{S_n(b-a)}.$$

   Que peut-on dire de cette quantité si g est croissante ?

   (c) On suppose dans cette question que pour un certain $\alpha > 0$, la fonction $x \to \alpha x - g(x)$ est positive et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'alors $\phi_n \leq \alpha$.

   (d) En déduire des bornes pour le ratio de couverture ϕ_n dans le cas du Call.