Finance : aspects mathématiques et numériques

TD - 11 mai 2016

On suppose que $(\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T \leq T_\infty)$ est la filtration naturelle d'un $\mathbb{P}^*$-mouvement brownien $\widetilde{W}$. On suppose, de plus, que $\mathbb{P}^*$ fait de tous les prix de zéro-coupons actualisés, au taux instantané $(r_t, 0 \leq t \leq T_\infty)$, des martingales.

1 Pricing d'option sur ZC dans le modèle de Ho-Lee

Dans cet exercice, on suppose que le processus de volatilité du zéro-coupon d'échéance T, $(\sigma_t^T, 0 \leq t \leq T \leq T_\infty)$ est déterministe et borné. $P(t,T)$ est (donc) solution de l'équation :

$$dP(t,T) = P(t,T)\left(r(t)dt + \sigma_t^T d\widetilde{W}_t\right).$$

1. Montrer que, pour $t \leq \theta$, $P^\theta(t,T) = P(t,T)/P(t,\theta)$, le prix θ-forward du zéro-coupon d'échéance T est solution de :
$$dP^\theta(t,T) = P^\theta(t,T)\left(\sigma_t^T - \sigma_t^\theta\right)\left(d\widetilde{W}_t - \sigma_t^\theta dt\right).$$
Identifier une probabilité $\mathbb{P}^\theta$ sous laquelle $W_t^\theta = \widetilde{W}_t - \int_0^t \sigma_s^\theta ds$ est un mouvement brownien pour $0 \leq t \leq \theta$.
2. Montrer que le prix $\theta-$forward du call de maturité θ et de strike K sur le zéro-coupon d'échéance $T > \theta$, $C_t^\theta = C_t/P(t,\theta)$, est donné par
$$C_t^\theta = \mathbb{E}^\theta\left[(P(\theta,T) - K)_+ |\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^\theta\left[\left(P^\theta(\theta,T) - K\right)_+ |\mathcal{F}_t\right].$$
3. Montrer que $C_t^\theta = B\left(t, P^\theta(t,T)\right)$ où
$$B(t,x) = \mathbb{E}\left[\left(xe^{\sqrt{v_t^{\theta,T}}G - \frac{1}{2}v_t^{\theta,T}} - K\right)_+\right]$$
où G est une gaussienne centrée réduite et $v_t^{\theta,T} = \int_t^\theta \left(\sigma_s^T - \sigma_s^\theta\right)^2 ds$.
4. En déduire que
$$B(t,x) = xN(d_+(t,x)) - KN(d_-(t,x)),$$
où $d_\pm(t,x) = \frac{\ln(\frac{x}{K})}{\sqrt{v_t^{\theta,T}}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{v_t^{\theta,T}}$
5. On note $H_t^T = N(d_+(t,P^\theta(t,T)))$ et $H_t^\theta = -KN(d_-(t,P^\theta(t,T)))$. Montrer que
$$C_t = H_t^T P(t,T) + H_t^\theta P(t,\theta)$$
et que $C_\theta = (P(\theta,T) - K)_+$. Quelle propriété reste-t-il à vérifier pour s'assurer que le portefeuille composé, à l'instant t, de H_t^θ de zéro-coupon d'échéance θ et H_t^T dé zéro-coupon d'échéance T est un portefeuille de couverture ?
6. Montrer que pour $0 \leq t \leq \theta$, $dC_t^\theta = \frac{\partial B}{\partial x}(t,P^\theta(t,T))dP^\theta(t,T)$ et que
$$\frac{\partial B}{\partial x}(t,x) = N(d_+(t,x)).$$

7. En déduire que $dC_t = H_t^T dP(t,T) + H_t^\theta dP(t,\theta)$. Identifier un portefeuille de couverture pour le call.
8. Dans le modèle de Ho-Lee, la dynamique du taux court est modélisée par $dr_t = \phi_t dt + \sigma d\widetilde{W}_t$ pour une fonction du temps ϕ_t et $\sigma > 0$. Quelle est la loi de de r_t ? de $\int_t^T r_s ds$? Montrer que, dans le modèle de Ho-Lee, la volatilité du zéro-coupon est déterministe et vaut

$$\sigma_t^T = -\sigma(T-t).$$

9. En déduire la valeur du call et la composition d'un portefeuille de couverture dans le modèle de Ho-Lee.

2 Le cadre Heath-Jarrow-Morton

On définit les taux forward instantanés $f(t,T)$ par $P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$, c'est-à-dire par $f(t,T) = -\frac{\partial \ln P}{\partial T}(t,T)$. $f(t,T)$ représente la valeur du taux court en T vu de t, c'est-à-dire comme anticipé par le marché à la date t. Le taux court en t vaut $r_t \stackrel{\text{def}}{=} f(t,t)$. Heath, Jarrow et Morton ont proposé (1992) d'écrire une dynamique non pas sur le taux court seulement, mais sur l'ensemble des taux forward instantanés $f(t,T)$:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \beta(t,T)d\widetilde{W}_t.$$

Pour chaque maturité T, $\alpha(\cdot,T)$ et $\beta(\cdot,T)$ sont des processus continus adaptés. Les différents taux d'intérêt, donc les différents taux forward instantanés, sont liés par l'absence d'opportunité d'arbitrage : ils ne peuvent bouger complètement indépendamment les uns des autres, sous peine de créer des arbitrages. Le but de cet exercice est de préciser ces liens.

1. Soit $X_t = -\int_t^T f(t,u)du$. Montrer que

$$dX_t = \left(f(t,t) - \int_t^T \alpha(t,u)du\right)dt - \left(\int_t^T \beta(t,u)du\right)d\widetilde{W}_t.$$

2. En déduire que

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \left(f(t,t) - \int_t^T \alpha(t,u)du + \frac{1}{2}\left(\int_t^T \beta(t,u)du\right)^2\right)dt - \left(\int_t^T \beta(t,u)du\right)d\widetilde{W}_t.$$

3. Montrer que, par absence d'opportunité d.arbitrage,

$$\alpha(t,T) = \beta(t,T)\int_t^T \beta(t,u)du.$$

   Le drift sous $\mathbb{P}^*$ du taux forward instantané $f(t,T)$ est donc entièrement déterminé par les volatilités $\beta(t,u)$ des taux forward instantanés $f(t,u), t \leq u \leq T$. Le modèle, et donc les prix d'options, sont entièrement déterminés par la donnée de la volatilité $\beta(t,T)$, par exemple $\beta(t,T) = \sigma(f(t,T))$ pour une fonction σ lipschitzienne bornée (cette condition assure l'existence et l'unicité d'une solution $f(t,T)$).