Méthodes mathématiques pour la finance : TD 3

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \in [0,t]))_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.

Sommes de Riemann et mouvement brownien

Soit $T > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $0 \leq k \leq N$, on note $t_k = \frac{kT}{N}$.

1. En remarquant que $W_T^2 = \sum_{k=1}^N (W_{t_k}^2 - W_{t_{k-1}}^2)$, montrer que
$$\sum_{k=1}^N W_{t_{k-1}} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(W_T^2 - \sum_{k=1}^N \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2\right).$$
2. Calculer $\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^N \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2\right)$ puis $\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^N \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 - T\right)^2\right)$ (*Rappel :* si $G \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{E}(G^4) = 3$).
3. En déduire que $\sum_{k=1}^N W_{t_{k-1}} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)$ converge dans L^2 vers $\frac{1}{2}(W_T^2 - T)$ lorsque $N \to +\infty$.
4. Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 t.q. $f(0) = 0$. Vérifier que $\sum_{k=1}^N (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2$ tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$ et en déduire la limite de $\sum_{k=1}^N f(t_{k-1})\,(f(t_k) - f(t_{k-1}))$.
5. Pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, on se donne une variable aléatoire H_k $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable de carré intégrable. Vérifier que $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^N H_{k-1}(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})\right)^2\right] = \frac{T}{N}\sum_{k=1}^N \mathbb{E}((H_{k-1})^2)$.

Martingales browniennes et temps d'atteinte

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire des processus $(X_t = W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ et $(e^{\lambda W_t - \lambda^2 t/2})_{t\geq 0}$ pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$?
2. Pour $a < 0 < b$ on note
$$\tau_{a,b} = \inf\{t \geq 0,\ W_t \notin]a,b[\} \ \text{(convention : } \inf\emptyset = +\infty)$$
le temps de sortie de l'intervalle $]a,b[$ et on pose $\tau_b = \tau_{-b,b}$.
Vérifier que $\tau_{a,b}$ est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt. Quelle est la limite de $\mathbb{P}(W_t \notin]a,b[)$ pour $t \to +\infty$. En déduire que $\mathbb{P}(\tau_{a,b} < +\infty) = 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\mathbb{E}(W_{\tau_{a,b}\wedge n})$. En déduire $\mathbb{E}(W_{\tau_{a,b}})$ puis les probabilités pour que $W_{\tau_{a,b}}$ vaille a et b.
4. Calculer $\mathbb{E}(\tau_{a,b})$ (On pourra appliquer le théorème d'arrêt à la martingale X_t).
5. Vérifier que $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda^2\tau_b/2}1_{\{W_{\tau_b}=b\}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda^2\tau_b/2}1_{\{W_{\tau_b}=-b\}}\right)$. En déduire la transformée de Laplace de τ_b i.e. la fonction $\mathcal{L}_{\tau_b} : \theta \in \mathbb{R}_+ \to \mathbb{E}\left(e^{-\theta\tau_b}\right)$.
6. Soit maintenant
$$\nu_b = \inf\{t \geq 0,\ W_t \geq b\} \ \text{(convention : } \inf\emptyset = +\infty).$$
Remarquer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\nu_b = +\infty) \leq \mathbb{P}(W_{\tau_{-n,b}} = -n)$ et en déduire que ν_b est presque sûrement fini. Calculer la transformée de Laplace de ν_b.
7. Que peut-on dire de $(Z_t = \frac{1}{b}W_{b^2t})_{t\geq 0}$? Comparer τ_b avec $\tilde{\tau}_1 = \inf\{t \geq 0,\ Z_t \notin]-1,1[\}$ et conclure que $\mathbb{E}(\tau_b) = b^2\mathbb{E}(\tau_1)$, égalité qui se déduit aussi de 4.