Méthodes mathématiques pour la finance : TD 4

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \in [0,t]))_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.

Formule d'intégration par parties

Soit $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$ et $\bar{X}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t \bar{K}_s ds + \int_0^t \bar{H}_s dW_s$ deux processus d'Itô.

1. Calculer dX_t^2 par la formule d'Itô et préciser le résultat dans le cas particulier $(X_0, K_s, H_s) = (0, 0, 1)$.
2. En remarquant que $d(X_t\bar{X}_t) = \frac{1}{2}d((X_t + \bar{X}_t)^2 - X_t^2 - \bar{X}_t^2)$, en déduire la formule dite d'intégration par parties :

$$d(X_t\bar{X}_t) = X_t d\bar{X}_t + \bar{X}_t dX_t + d\langle X, \bar{X}\rangle_t \text{ où } \langle X, \bar{X}\rangle_t = \int_0^t H_s\bar{H}_s ds.$$

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soit $x_0, \sigma > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre l'Équation Différentielle Stochastique

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t, \;\; X_0 = x_0$$

c'est-à-dire à trouver un processus $\mathcal{F}_t$-adapté continu $(X_t)_{t\geq 0}$ t.q.

$$p.s., \; \forall t \geq 0, \; X_t = x_0 - a\int_0^t X_s ds + \sigma W_t.$$

1. En supposant que $(X_t)_{t\geq 0}$ est solution, calculer $d(e^{at}X_t)$ et en déduire que pour tout $t \geq 0$, $X_t = e^{-at}Y_t$ avec $Y_t = x_0 + \sigma\int_0^t e^{as}dW_s$.
2. Vérifier que $(e^{-at}Y_t)_{t\geq 0}$ est bien solution de l'EDS de départ.
3. Pour $t \geq 0$, calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathrm{Var}(X_t)$. Remarquer que $\sum_{k=1}^n e^{a\frac{(k-1)t}{n}}(W_{\frac{kt}{n}} - W_{\frac{(k-1)t}{n}})$ converge dans L_2 vers $\int_0^t e^{as}dW_s$ lorsque $n \to \infty$ et en déduire la loi de X_t.

En fait on peut montrer plus généralement que $(W_t, X_t, \int_0^t X_s ds)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien et pour effectuer des calculs portant sur $\int_0^t X_s ds$ il peut être pratique d'exprimer cette intégrale comme $\frac{1}{a}(x_0 - X_t + \sigma W_t)$.

Modèle de Black-Scholes

Soit $x_0, \sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre l'Équation Différentielle Stochastique de Black-Scholes

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + \mu S_t dt, \;\; S_0 = x_0$$

c'est-à-dire à trouver un processus $\mathcal{F}_t$-adapté continu $(S_t)_{t\geq 0}$ t.q.

$$p.s., \; \forall t \geq 0, \; S_t = x_0 + \sigma\int_0^t S_r dW_r + \mu\int_0^t S_r dr.$$

1. En supposant que $(S_t)_{t\geq 0}$ est solution avec $\forall t \geq 0$, $S_t > 0$, calculer $\ln(S_t)$ puis S_t.
2. Vérifier que le processus S_t obtenu à la question précédente est bien solution.
3. On pose $Y_t = 1/S_t$ où S_t est le processus obtenu à la question 1. Exprimer Y_t comme processus d'Itô et vérifier que si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une autre solution de l'EDS de Black-Scholes alors p.s. $\forall t \geq 0$, $X_t Y_t = 1$. Conclusion ?

Exercice

$$\text{On pose } (M_t, H_t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{W_t^2}{2(1-t)}}, \frac{-W_t}{(1-t)^{3/2}} e^{-\frac{W_t^2}{2(1-t)}} \right) \text{ si } t \in [0,1[, \\ (0,0) \text{ si } t = 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que p.s. $t \mapsto (M_t, H_t)$ est continue sur $[0,1]$ et que $\mathbb{P}\left(\int_0^1 H_s^2 ds < +\infty\right) = 1$.
2. Montrer que $\forall t \in [0,1]$, $M_t = 1 + \int_0^t H_s dW_s$ et en déduire $\int_0^1 H_s dW_s$ puis $\mathbb{E}\left(\int_0^1 H_s^2 ds\right)$.
3. Vérifier que pour $t \in [0,1[$, $\mathbb{E}(H_t^2) = \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}$ et $\mathbb{E}(M_t) = 1$. En déduire que $\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,1]} |M_t|) = +\infty$.

Exercice

Soit $(H_t)_{t\in[0,T]}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté t.q. $\mathbb{P}(\int_0^T H_s^2 ds < +\infty) = 1$. L'inégalité de Doob assure que si $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty$ alors $\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]}(\int_0^t H_s dW_s)^2) < +\infty$. On veut montrer une réciproque à ce résultat. On suppose donc que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right) < +\infty.$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau_n = \inf\{t \in [0,T] : \int_0^t H_s^2 ds \geq n\} \wedge T$ est un temps d'arrêt t.q. $\mathbb{E}(\int_0^{\tau_n} H_s^2 ds) = \mathbb{E}(\int_0^T (1_{\{s\leq\tau_n\}} H_s)^2 ds) \leq n$.
2. En déduire par la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique que $\mathbb{E}(\int_0^{\tau_n} H_s^2 ds) \leq \mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]}(\int_0^t H_s dW_s)^2)$.
3. Conclure que $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) \leq \mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]}(\int_0^t H_s dW_s)^2)$.