Méthodes mathématiques pour la finance : TD 5

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et on note sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \in [0,t]))_{t\geq 0}$.

Formule de Black-Scholes pour le Call

On se place dans le modèle de Black-Scholes qui comporte un actif sans risque et un actif risqué de prix respectifs e^{rt} et $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$ à l'instant $t \in [0,T]$ où $r, \mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma, S_0 > 0$.

1. Pour quelle probabilité $\mathbb{P}^*$, le prix à l'instant $t \geq 0$ d'une option européenne promettant $f(S_T)$ à l'instant T, est-il donné par $\mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t\right)$? Que peut-on dire de $(W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{P}^*$?
2. Expliciter S_T en fonction de S_t et $W_T - W_t$. En déduire que le prix à l'instant $t \in [0,T[$ du Call européen d'échéance T et de strike K est $C(t, S_t)$ où
$$C(t,x) = x\mathcal{N}(d_1(T-t,x)) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2(T-t,x))$$
avec $\mathcal{N}(d) = \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$, $d_1(\theta, x) = \frac{\log(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$, $d_2(\theta,x) = d_1(\theta,x) - \sigma\sqrt{\theta}$.
3. Vérifier que
$$\partial_x C(t,x) = \mathbb{E}^*\left(e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} 1_{\{xe^{\sigma(W_T-W_t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \geq K\}}\right)$$
et en déduire que la quantité d'actif risqué à détenir à l'instant t dans le portefeuille de réplication du Call est $\mathcal{N}(d_1(T-t, S_t))$. Quelles valeurs cette quantité peut-elle prendre ?
4. Vérifier que pour $t \in [0,T[$, la fonction $x \mapsto C(t,x)$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

On suppose que le taux d'intérêt sans risque r est positif.

5. Écrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction $C(t,x)$. Vérifier que $C(t,x) - x\partial_x C(t,x) \leq 0$ et conclure que $\partial_t C(t,x) \leq 0$.
Pour $x > 0$ et $t \in [0,T]$, vérifier que l'inégalité de Jensen assure que
$$\mathbb{E}^*\left((xe^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} - Ke^{-r(T-t)})^+ | \mathcal{F}_{T-t}\right) \geq e^{-r(T-t)}(xe^{\sigma W_{T-t} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K)^+$$
et retrouver que $C(0,x) \geq C(t,x)$.

De manière analogue, on peut vérifier que le prix à l'instant $t \in [0,T[$ du Put européen d'échéance T et de strike K est $Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2(T-t,S_t)) - S_t\mathcal{N}(-d_1(T-t,S_t))$ et que la quantité d'actif risqué à détenir dans le portefeuille de réplication est $-\mathcal{N}(-d_1(T-t,S_t))$.

Un cas particulier du théorème de Girsanov

Soit $T > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $t \in [0,T]$, on pose $L_t = e^{-\theta B_t - \theta^2 t/2}$, $W_t = B_t + \theta t$ et on note $\mathbb{P}_t^*$ la probabilité de densité L_t par rapport à $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}_t^*$ l'espérance associée. Une variable aléatoire X est intégrable sous $\mathbb{P}_t^*$ si et seulement si XL_t l'est sous $\mathbb{P}$ et dans ce cas, $\mathbb{E}_t^*(X) = \mathbb{E}(XL_t)$.

1. Vérifier que sous $\mathbb{P}$, $(L_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale positive d'espérance 1.
2. En déduire que si $t \in [0,T]$, pour toute variable aléatoire X $\mathcal{F}_t$-mesurable bornée $\mathbb{E}_t^*(X) = \mathbb{E}_T^*(X)$.
3. Soit $0 \leq t \leq s \leq T$ et Y une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable bornée. Vérifier que si X est $\mathcal{F}_t$-mesurable bornée, $\mathbb{E}_T^*(XY) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(YL_s|\mathcal{F}_t))$ et en déduire la formule de Bayes
$$\mathbb{E}_T^*(Y|\mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}(YL_s|\mathcal{F}_t)}{L_t} = \mathbb{E}\left(Ye^{-\theta(B_s-B_t)-\theta^2(s-t)/2}|\mathcal{F}_t\right).$$
4. Montrer que pour $0 \leq t \leq s \leq T$ et $u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}_T^*(e^{iu(W_s-W_t)}|\mathcal{F}_t) = e^{-\frac{u^2}{2}(s-t)}$. En déduire la loi de $W_s - W_t$ sous $\mathbb{P}_T^*$ puis le fait que $W_s - W_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ sous cette probabilité (on admettra que comme l'égalité $\mathbb{E}_T^*(f(W_s - W_t))|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_T^*(f(W_s - W_t))$ est vérifiée avec $f(x) = e^{iux}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, elle l'est pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée). Que peut-on dire de $(W_t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{P}_T^*$?