Méthodes mathématiques pour la finance : TD 6

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et on note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle . On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque et un actif risqué de prix respectifs e^{rt} et $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$ à l'instant $t \in [0,T]$ où $r, \mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma, S_0 > 0$. Pour $\alpha = (\mu - r)/\sigma$, on note $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{-\alpha B_T - \alpha^2 T/2}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \alpha t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien.

Option sur moyenne

On s'intéresse à un Call sur moyenne d'échéance T et de Strike K c'est-à-dire une option qui rapporte à son détenteur $h = (\frac{1}{T}\int_0^T S_u du - K)^+$ à l'instant T. On note $Y_t = \frac{1}{T}\int_0^t S_u du$.

1. Vérifier que $h^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T S_u^2 du$ et en déduire que $\mathbb{E}^*(h^2) < +\infty$. Quel résultat assure que l'option est réplicable ? Exprimer sa valeur V_t à l'instant t sous forme d'espérance conditionnelle.
2. Vérifier que $Y_T = Y_t + \frac{S_t}{T}\int_t^T e^{\sigma(W_u - W_t) + (r - \sigma^2/2)(u-t)} du$
3. En déduire que $V_t = v(t, S_t, Y_t)$ pour une fonction $v(t,x,y)$ que l'on exprimera sous forme d'espérance.
4. En admettant que v est une fonction régulière, calculer dV_t puis $d(e^{-rt}V_t)$.
5. En déduire la quantité d'actif risqué H_t à détenir dans le portefeuille de couverture à l'instant t et vérifier que la fonction v satisfait le problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{x}{T}\frac{\partial v}{\partial y} - rv = 0 \text{ pour } (t,x,y) \in [0,T[\times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ v(T,x,y) = (y-K)^+. \end{cases}$$

Prime d'exercice anticipé pour le Put américain lorsque $r \geq 0$

Soit $u(t,x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}^*(e^{-r(\tau-t)}(K - xe^{\sigma(W_\tau - W_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(\tau - t)})^+)$ la fonction de pricing du Put américain de strike K et d'échéance T i.e. la fonction telle que le prix à l'instant $t \leq T$ du Put américain est $u(t, S_t)$. Le supremum est calculé sur l'ensemble $\mathcal{T}_{t,T}$ des temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$ de la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$.

1. Vérifier que $u(0,S_0) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}^*[e^{-r\tau}(S_\tau + (K - S_\tau)^+)] - S_0$. En remarquant que $x + (K-x)^+ = \max(x,K) = K + (x-K)^+$ et en utilisant la relation de parité Call-Put, conclure que $u(0,S_0) \leq P(0,S_0) + K(1 - e^{-rT})$ où $P(0,S_0)$ est le prix initial du Put européen.
2. Soit $t \in [0,T[$. Vérifier que $x \to u(t,x)$ est une fonction décroissante, convexe, strictement positive et minorée par $(K-x)^+$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $s(t) = \sup\{x \geq 0 :\ u(t,x) = (K-x)^+\}$. Vérifier que $u(t,s(t)) = (K - s(t))^+$ puis que $s(t) \in [0,K[$.
   En déduire que $\forall x \in [0, s(t)],\ u(t,x) = K - x$ et $\forall x > s(t),\ u(t,x) > (K-x)^+$.
   Pourquoi la fonction $t \in [0,T[\to s(t)$ est-elle croissante ?
4. Donner l'inéquation aux dérivées partielles satisfaites par la fonction $u(t,x)$.
5. Calculer $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rx\frac{\partial u}{\partial x} - ru$ dans la zone d'exercice $\{(t,x) :\ 0 < x \leq s(t)\}$.
6. En supposant que u est dans $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}_+)$ et que $\frac{\partial u}{\partial x}$ est bornée, montrer que $M_t = e^{-rt}u(t,S_t) + K\int_0^t re^{-rv}1_{\{S_v \leq s(v)\}} dv$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale.

7. En déduire la formule de "prime d'exercice anticipé" qui exprime le surcoût de l'option américaine par rapport à l'option européenne :

$$u(0, S_0) = P(0, S_0) + K \int_0^T re^{-rt}\mathbb{P}^*(S_t \leq s(t))dt.$$

En fait la fonction u n'est pas dans $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}_+)$ mais malgré cette difficulté, la formule de "prime d'exercice anticipé" peut être justifiée rigoureusement.

Calcul du Put perpétuel pour $r \geq 0$

On note $u_\infty(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\infty}} \mathbb{E}^*(e^{-r\tau}(K - xe^{\sigma W_\tau + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau})^+)$ la fonction de pricing du Put américain perpétuel.

1. Reprendre la question 2 de l'exercice précédent en remplaçant $u(t,.)$ par u_∞.
2. En déduire l'existence de $x^* \in [0, K[$ tel que

$$\forall x \in [0, x^*],\ u_\infty(x) = K - x \text{ et } \forall x > x^*,\ u_\infty(x) > (K - x)^+.$$

3. Justifier formellement que sur $]x^*, +\infty[$, la fonction u_∞ est solution de l'équation différentielle ordinaire de Black-Scholes

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} f''(x) + rxf'(x) - rf(x) = 0.$$

4. Donner la solution générale de cette équation différentielle ordinaire (*on pourra regarder pour quelles valeurs de α la fonction x^α est solution de l'équation*).
5. Vérifier que $\lim_{x \to +\infty} \frac{u_\infty(x)}{x} = 0$. En admettant que u_∞ et sa dérivée première u'_∞ sont continues au point x^* (condition dite de smooth fit), déterminer u_∞ et x^*.

Option barrière Down and Out

Soit V_0 la prime de l'option qui rapporte $\varphi(S_T)1_{\{\min_{t\in[0,T]} S_t > L\}}$ avec φ bornée et $L \in]0, S_0[$.

1. Soit $\alpha = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$. Sous quelle probabilité $\mathbb{Q}$ le processus $(\beta_t = W_t + \alpha t)_{t\in[0,T]}$ est-il un mouvement brownien ? Exprimer S_t en fonction de β_t et en déduire ψ et l t.q.

$$\mathbb{E}^* \left(\varphi(S_T)1_{\{\min_{t\in[0,T]} S_t \leq L\}}1_{\{S_T > L\}} \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\psi(\beta_T)1_{\{\min_{t\in[0,T]} \beta_t \leq l\}}1_{\{\beta_T > l\}} \right).$$

2. Soit $\tau_l = \inf\{t \geq 0 : B_t \leq l\}$. Que vaut B_{τ_l} ? On admet que sous $\mathbb{P}$, $(B_{\tau_l + t} - B_{\tau_l})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de τ_l. En déduire que $\mathbb{E}\left(1_{\{\tau_l \leq T\}}\psi(B_T)1_{\{B_T > l\}}\right) = \mathbb{E}\left(1_{\{\tau_l \leq T\}}\mathbb{E}(\psi(l + B_t)1_{\{l + B_t > l\}}|_{t = T - \tau_l})\right) = \mathbb{E}\left(\psi(2l - B_T)1_{\{B_T < l\}}\right)$
puis que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\psi(\beta_T)1_{\{\min_{t\in[0,T]} \beta_t \leq l\}}1_{\{\beta_T > l\}}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\psi(2l - \beta_T)1_{\{\beta_T < l\}}\right)$.
3. Conclure que V_0 est égal au prix d'une option sans barrière de payoff à déterminer.