Méthodes mathématiques pour la finance : TD 7

Changement de numéraire et option d'échange

1. Soient X, Y et Z trois processus d'Itô avec Z strictement positif et $V_t = G_tX_t + H_tY_t$ où H et G sont des processus adaptés bornés. Pour un processus R quelconque, on note R^Z le processus $\frac{R}{Z}$. Montrer que
$$dV_t = G_t dX_t + H_t dY_t \Leftrightarrow dV_t^Z = G_t dX_t^Z + H_t dY_t^Z$$
et donner une interprétation financière de ce résultat.

2. On considère un modèle de Black-Scholes avec un actif sans risque $S_t^0 = e^{rt}$ et 2 actifs risqués
$$dS_t^1 = \sigma_1 S_t^1 dB_t^1 + \mu_1 S_t^1 dt,\ dS_t^2 = \sigma_2 S_t^2 dB_t^2 + \mu_2 S_t^2 dt$$
où (B^1, B^2) sont deux mouvements browniens indépendants sous $\mathbb{P}$.
On pose $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ et $B_t = \frac{\sigma_1 B_t^1 - \sigma_2 B_t^2}{\sigma}$. Pour $0 \leq s \leq t$, quelle est la loi de $(B_s, B_t - B_s)$ sous $\mathbb{P}$? Que peut-on dire du processus $(B_t)_{t\geq 0}$ sous $\mathbb{P}$?

3. On pose $X_t = S_t^1$ et $Y_t = S_t^2$. Ecrire X_t^Y en fonction de B_t. Exprimer $(X_t^Y)_{t\leq T}$ comme processus d'Itô et donner une probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle c'est une martingale.

4. On veut pricer une option d'échange européenne de maturité $T > 0$ et de payoff $(S_T^1 - S_T^2)^+$. Supposons qu'il existe un portefeuille autofinancé dans les 2 actifs risqués qui réplique l'option i.e. dont la valeur en T est $V_T = (S_T^1 - S_T^2)^+$.
Exprimer V_T^Y en fonction de X_T^Y. Que peut-on dire de $(V_t^Y)_{t\leq T}$ sous $\mathbb{Q}$? En déduire que $V_t^Y = v(t, X_t^Y)$ pour une fonction $v(t,.)$ que l'on précisera.

5. Donner l'équation aux dérivées partielles satisfaite par v et en déduire l'existence du portefeuille mentionné à la question précédente. Le prix initial de l'option dépend-il de r ?

6. Proposer une autre méthode sans changement de numéraire pour pricer l'option.

Modèle de Black-Scholes avec taux de dividendes

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\in[0,T]}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t (avec $r \geq 0$) et un actif risqué de prix S_t à l'instant t qui vérifie
$$dS_t = \sigma S_t\, dB_t + (\mu - \delta) S_t\, dt$$
où $\sigma > 0$ est la volatilité, $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement de l'actif et $\delta \geq 0$ le taux de dividende : entre les instants t et $t + dt$, le détenteur d'un actif risqué touche $\delta S_t dt$ comme dividende. Pour $\alpha = (\mu - r)/\sigma$, on note $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{-\alpha B_T - \alpha^2 T/2}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \alpha t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien.

1. Soit ϕ la stratégie de portefeuille définie par le couple $(H_t^0, H_t)_{t\in[0,T]}$ de processus $\mathcal{F}_t$ adaptés t.q. $\mathbb{P}(\int_0^T (|H_t^0| + H_t^2) dt < +\infty) = 1$. On pose $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ la valeur du portefeuille à l'instant t et $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ sa valeur actualisée.
Expliquer pourquoi la condition d'autofinancement s'écrit $dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t + \delta H_t S_t dt$ et montrer qu'elle est équivalente à $d\tilde{V}_t(\phi) = \sigma H_t \tilde{S}_t dW_t$.

2. Soit $h \geq 0$ une variable $\mathcal{F}_T$ mesurable t.q. $\mathbb{E}^*(h^2) < +\infty$. Quel résultat assure que l'option européenne de maturité T et de payoff h est réplicable ?
   Exprimer le prix V_t à l'instant t de cette option comme une espérance conditionnelle.
3. Vérifier que dans le cas $h = f(S_T)$ d'une option vanilla, $V_t = v(t, S_t)$ pour une fonction v que l'on précisera.
4. Afin d'expliciter la dépendance en le strike K, le taux d'intérêt r et le taux de dividende δ, on note $C_{K,r,\delta}$ (resp. $P_{K,r,\delta}$) la fonction v dans le cas du Call (resp. Put) européen de strike K.
   Vérifier que $C_{K,r,\delta}(T-t,x) = \mathbb{E}^*\left[e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t} e^{-\delta t}\left(x - Ke^{-\sigma W_t + (\delta - r + \frac{\sigma^2}{2})t}\right)^+\right]$.
5. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité de densité $e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$ par rapport à $\mathbb{P}^*$. Que peut-on dire du processus $(\tilde{W}_s = -W_s + \sigma s)_{s \in [0,t]}$ sous $\mathbb{Q}$?
   En déduire le principe de symétrie $\forall (\theta, x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^*,\ C_{K,r,\delta}(\theta, x) = P_{x,\delta,r}(\theta, K)$.