Calcul stochastique et finance : TD 7

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et on note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle . On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque et un actif risqué de prix respectifs e^{rt} et $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$ à l'instant $t \in [0,T]$ où $r, \mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma, S_0 > 0$. Pour $\alpha = (\mu - r)/\sigma$, on note $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{-\alpha B_T - \alpha^2 T/2}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \alpha t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien.

Prime d'exercice anticipé pour le Put américain lorsque $r \geq 0$

Soit $v(t,x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}^*(e^{-r(\tau-t)}(K - xe^{\sigma(W_\tau - W_t)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(\tau-t)})^+)$ la fonction de pricing du Put américain de strike K et d'échéance T i.e. la fonction telle que le prix à l'instant $t \leq T$ du Put américain est $v(t, S_t)$. Le supremum est calculé sur l'ensemble $\mathcal{T}_{t,T}$ des temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$ de la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$.

1. Vérifier que $v(0,S_0) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}^*[e^{-r\tau}(S_\tau + (K - S_\tau)^+)] - S_0$. En remarquant que $x + (K-x)^+ = \max(x,K) = K + (x-K)^+$ et en utilisant la relation de parité Call-Put, conclure que $v(0,S_0) \leq P(0,S_0) + K(1 - e^{-rT})$ où $P(0,S_0)$ est le prix initial du Put européen.
2. Soit $t \in [0,T[$. Vérifier que $x \to v(t,x)$ est une fonction décroissante, convexe, strictement positive et minorée par $(K-x)^+$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $s(t) = \sup\{x \geq 0 :\ v(t,x) = (K-x)^+\}$. Vérifier que $v(t,s(t)) = (K - s(t))^+$ puis que $s(t) \in [0,K[$. En déduire que $\forall x \in [0,s(t)],\ v(t,x) = K - x$ et $\forall x > s(t),\ v(t,x) > (K-x)^+$. Pourquoi la fonction $t \in [0,T[\to s(t)$ est-elle croissante ?
4. Donner l'inéquation aux dérivées partielles satisfaites par la fonction $v(t,x)$.
5. Calculer $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v}{\partial x} - rv$ dans la zone d'exercice $\{(t,x) :\ 0 < x \leq s(t)\}$.
6. En supposant que v est dans $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}_+)$ et que $\frac{\partial v}{\partial x}$ est bornée, montrer que $M_t = e^{-rt}v(t,S_t) + K\int_0^t re^{-rv}1_{\{S_v \leq s(v)\}}dv$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale.
7. En déduire la formule de "prime d'exercice anticipé" qui exprime le surcoût de l'option américaine par rapport à l'option européenne :
$$v(0,S_0) = P(0,S_0) + K\int_0^T re^{-rt}\mathbb{P}^*(S_t \leq s(t))dt.$$
En fait la fonction u n'est pas dans $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}_+)$ mais malgré cette difficulté, la formule de "prime d'exercice anticipé" peut être justifiée rigoureusement.

Calcul du Put perpétuel pour $r \geq 0$

On note $v_\infty(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{0,\infty}} \mathbb{E}^*(e^{-r\tau}(K - xe^{\sigma W_\tau + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau})^+)$ la fonction de pricing du Put américain perpétuel.

1. Reprendre la question 2 de l'exercice précédent en remplaçant $v(t,.)$ par v_∞.
2. En déduire l'existence de $x^* \in [0,K[$ tel que $\forall x \in [0,x^*],\ v_\infty(x) = K - x$ et $\forall x > x^*,\ v_\infty(x) > (K-x)^+$.
3. Justifier formellement que sur $]x^*, +\infty[$, la fonction v_∞ est solution de l'équation différentielle ordinaire de Black-Scholes $\frac{\sigma^2 x^2}{2}f''(x) + rxf'(x) - rf(x) = 0$.
4. Donner la solution générale de cette équation différentielle ordinaire (*on pourra regarder pour quelles valeurs de α la fonction x^α est solution de l'équation*).
5. Vérifier que $\lim_{x\to+\infty}\frac{v_\infty(x)}{x} = 0$. En admettant que v_∞ et sa dérivée première v'_∞ sont continues au point x^* (condition dite de smooth fit), déterminer v_∞ et x^*.