Méthodes mathématiques pour la finance : <u>TD 8</u>

Modèle de Cramer Lundberg en assurance

On suppose que les réserves financières à l'instant t d'une compagnie d'assurance sont données par

$$X_t = x_0 + ct - Y_t \text{ avec } Y_t = \sum_{j=1}^{N_t} Z_j \text{ où}$$

— $x_0 \geq 0$ est la richesse initiale de la compagnie,

— le terme ct où $c > 0$ représente les cotisations des assurés qui sont supposées être versées de façon régulière,

— les montants aléatoires $(Z_j)_{j\geq 1}$ remboursés aux assurés lors des sinistres sont supposés positifs i.i.d. et indépendants du processus $(N_t)_{t\geq 0}$,

— $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ qui compte le nombre de sinistres. On note $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : N_t = n\}$ le n-ème temps de saut du processus de Poisson et on rappelle que les variables aléatoires $(T_n = \tau_n - \tau_{n-1})_{n\geq 1}$ sont i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Nous allons nous intéresser tout particulièrement au temps $\eta = \inf\{t \geq 0 : \ X_t < 0\}$ dit de ruine où les réserves de la compagnie deviennent négatives.

1. Vérifier que $\frac{\tau_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}}_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda}$ et que N_t tend p.s. vers $+\infty$ avec t. Remarquer que pour $t \geq \tau_1$, $\frac{\tau_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{\tau_{N_t+1}}{N_t}$ et en déduire que $\frac{N_t}{t} \xrightarrow{\text{p.s.}}_{t\to\infty} \lambda$.
   En écrivant pour $t \geq \tau_1$, $\frac{Y_t}{t} = \frac{N_t}{t} \times \frac{1}{N_t}\sum_{j=1}^{N_t} Z_j$, conclure que $\frac{Y_t}{t} \xrightarrow{\text{p.s.}}_{t\to\infty} \lambda\mathbb{E}[Z_1]$.
2. En déduire que si $\lambda\mathbb{E}[Z_1] > c$ (l'espérance des remboursements dépasse les cotisations), $\mathbb{P}(\eta < \infty) = 1$.

On se place dans le cas particulier où les Z_j sont distribuées suivant la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

3. Pour $\theta > -\mu$, vérifier que $\mathbb{E}\left[e^{-\theta Y_t}\right] = e^{-\frac{\lambda\theta}{\mu+\theta}t}$. En déduire que pour $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, s \leq t) = \sigma(X_s, s \leq t)$, $(e^{\theta X_t + \theta(\frac{\lambda}{\mu+\theta}-c)t})_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.
4. Vérifier que pour $s, t \geq 0$, $\mathbb{P}(Z_1 - t > s | Z_1 > t) = \mathbb{P}(Z_1 > s)$ c'est-à-dire que la loi conditionnelle de $Z_1 - t$ sachant $Z_1 > t$ est toujours la loi exponentielle de paramètre μ (propriété d'absence de mémoire).
   Comme $t \mapsto X_t$ croît au taux $c > 0$ entre les sauts du processus de Poisson, si $\eta < \infty$, alors nécessairement η est l'un des temps de sauts du processus de Poisson et l'absence de mémoire de la variable exponentielle Z_{N_η} qui dépasse la variable aléatoire indépendante $\lim_{s\to\eta^-} X_s$ entraîne que $Z_{N_\eta} - \lim_{s\to\eta^-} X_s = -X_\eta$ suit la loi exponentielle de paramètre μ. Plus formellement, pour $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurables,
   $$\mathbb{E}\left[\varphi(\eta)1_{\{\eta<\infty\}}\psi(X_\eta)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(\eta)1_{\{\eta<\infty\}}\right]\int_{-\infty}^{0} \psi(x)\mu e^{\mu x}dx, \tag{1}$$
   égalité qui sera démontrée à la question 7 et que nous admettrons auparavant.
5. Supposons que les cotisations dépassent l'espérance des remboursements : $c > \frac{\lambda}{\mu}$.
   (a) Vérifier que $(e^{(\frac{\lambda}{c}-\mu)X_t})_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale et que pour $t \geq 0$, $e^{(\frac{\lambda}{c}-\mu)X_{t\wedge\eta}} \leq 1_{\{\eta<\infty\}}e^{(\frac{\lambda}{c}-\mu)X_\eta} + 1_{\{\eta=\infty\}}$. Pourquoi a-t-on $X_t \xrightarrow{\text{p.s.}}_{t\to\infty} +\infty$?

(b) En déduire que $\mathbb{P}(\eta < \infty) = \frac{\lambda}{c\mu} e^{(\frac{\lambda}{c} - \mu)x_0}$.

6. Supposons $c = \frac{\lambda}{\mu}$.
   (a) Pour $\theta \in]-\mu, 0[$, vérifier que $\theta(\frac{\lambda}{\mu+\theta} - c) < 0$ et que $\mathbb{E}\left[1_{\{\eta<\infty\}} e^{\theta(\frac{\lambda}{\mu+\theta} - c)\eta}\right] = \frac{\mu+\theta}{\mu} e^{\theta x_0}$.
   (b) Conclure que $\mathbb{P}(\eta < \infty) = 1$.
7. L'objectif de cette question est de démontrer la formule formule (1).
   (a) Montrer que pour $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[1_{\{X_{\tau_1} \geq 0, \ldots, X_{\tau_{n-1}} \geq 0\}} 1_{\{x_0 + c\tau_n - \sum_{j=1}^n Z_j < 0\}} \psi(x_0 + c\tau_n - \sum_{j=1}^n Z_j) | (\tau_1, Z_1, \ldots, \tau_{n-1}, Z_{n-1}, \tau_n)]$$
$$= \mathbb{E}[1_{\{X_{\tau_1} \geq 0, \ldots, X_{\tau_{n-1}} \geq 0, X_{\tau_n} < 0\}} | (\tau_1, Z_1, \ldots, \tau_{n-1}, Z_{n-1}, \tau_n)] \int_{-\infty}^0 \psi(x) \mu e^{\mu x} dx.$$

   (b) Remarquer que $1_{\{\eta<\infty\}} = \sum_{n \geq 1} 1_{\{\eta = \tau_n\}}$, traduire l'événement $\{\eta = \tau_n\}$ sur le vecteur aléatoire $(X_{\tau_1}, \ldots, X_{\tau_n})$ et conclure que (1) est vraie.

Les propriétés $\mathbb{P}(\eta < \infty) = 1$ lorsque $c = \lambda \mathbb{E}[Z_1]$ et $\mathbb{P}(\eta < \infty) = \frac{\lambda \mathbb{E}[Z_1]}{c}$ lorsque $c > \lambda \mathbb{E}[Z_1]$ et $x_0 = 0$ restent vraies même si la loi commune des variables $(Z_j)_{j \geq 1}$ n'est pas nécessairement exponentielle. Pour vérifier que c'est le cas pour la seconde nous allons supposer $c > \lambda \mathbb{E}[Z_1]$ et poser $\psi(x) = \mathbb{P}(\forall t \geq 0, x + ct - Y_t \geq 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

8. Que vaut $\psi(x)$ pour $x < 0$?
9. Pourquoi a-t-on $\mathbb{P}(\inf_{t \geq 0} ct - Y_t > -\infty) = 1$? En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 1$.
10. Soit $x \geq 0$. Vérifier que pour $h > 0$, $\psi(x) = \mathbb{E}[\psi(x + c(\tau_1 \wedge h) - Y_{\tau_1 \wedge h})]$. En admettant que ψ est dérivable, en déduire que $\psi'(x) = \frac{\lambda}{c}(\psi(x) - \mathbb{E}[\psi(x - Z_1) 1_{\{Z_1 \leq x\}}])$.
11. Montrer que $\int_0^x \psi(y - Z_1) 1_{\{Z_1 \leq y\}} dy = \int_0^x \psi(z) 1_{\{Z_1 \leq x - z\}} dz$.
    En déduire que $\int_0^x \psi(y) - \mathbb{E}[\psi(y - Z_1) 1_{\{Z_1 \leq y\}}] dy = \int_0^x \psi(y) \mathbb{P}(Z_1 > x - y) dy$ puis que $\psi(0) = \psi(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x \psi(x - y) \mathbb{P}(Z_1 > y) dy$.
12. Remarquer que $\mathbb{E}[Z_1] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z_1 > y) dy$ et conclure que $\psi(0) = 1 - \frac{\lambda \mathbb{E}[Z_1]}{c}$.

Processus de Poisson composé

Soit $Y_t = \sum_{j=1}^{N_t} Z_j$ où $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ indépendant de la suite $(Z_j)_{j \geq 1}$ de variables i.i.d. telles que $\mathbb{E}[Z_1^2] < \infty$.

1. Calculer $\mathbb{E}[Y_t | N_t = n]$ pour $n \in \mathbb{N}$ et vérifier que $\mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}[Y_t | N_t])^2 | N_t] = N_t \mathrm{Var}(Z_1)$.
   En déduire que $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[N_t] \mathbb{E}[Z_1]$ et $\mathrm{Var}(Y_t) = \mathbb{E}[N_t] \mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{Var}(N_t) \mathbb{E}^2[Z_1]$.
   Conclure que $\mathrm{Var}(Y_t) = \lambda t \mathbb{E}[Z_1^2]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[e^{iuY_t} | N_t]$ et en déduire que les fonctions caractéristiques de Φ_{Y_t} et Φ_{Z_1} de Y_t et Z_1 sont reliées par $\Phi_{Y_t}(u) = \exp(\lambda t(\Phi_{Z_1}(u) - 1))$.
   Conclure que $\frac{1}{\sqrt{t}}(Y_t - \lambda t \mathbb{E}[Z_1]) \xrightarrow{\mathcal{L}}_{t \to \infty} W \sim \mathcal{N}_1(0, \lambda \mathbb{E}[Z_1^2])$.