Finance : aspects mathématiques et numériques

TD - 04 mai 2016

Exercice 1 - Modèle de Vasicek

Dans le modèle de Vasicek (1977), la dynamique du taux court est modélisée par

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

où $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}^*$ (une probabilité qui fait des prix de tous les zéro-coupons actualisés des martingales). On note $(\mathcal{F}_t)$ la filtration naturelle de W. On cherche à calculer le prix du zéro-coupon de maturité T dans ce modèle.

1. Exprimer la valeur en t, $P(t,T)$, du zéro-coupon de maturité T en fonction de $(r_s, t \leq s \leq T)$.
2. Soit $X_t = r_t - b$. Montrer que X est un processus d'Orstein-Uhlenbeck solution de
$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t.$$
3. En déduire que $r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$.
4. Quelle est la loi de r_t ? Que dire de $\mathbb{P}^*(r_t < 0)$? Quelle est la loi limite de r_t quand t tend vers l'infini ?
5. Montrer que
$$a \int_t^T X_s ds = \sigma(W_T - W_t) + X_t - X_t e^{-a(T-t)} - \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s$$
En déduire (en utilisant "le" lemme classique de calcul d'espérance conditionnelle) que pour toute fonction f positive
$$\mathbb{E}\left(f\left(\int_t^T X_s ds \right) \Big| \mathcal{F}_t \right) = \psi(X_t),$$
où $\psi(x) = \mathbb{E}\left(f(\int_0^{T-t} X_s^x ds) \right)$, où $(X_t^x, t \in [0,T])$ est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique
$$dX_t^x = -aX_t^x dt + \sigma dW_t, X_0^x = x.$$
6. En déduire que $P(t,T) = F(T-t, r_t - b)$ où $F(\theta, x) = e^{-b\theta} \mathbb{E}^* \left(e^{-\int_0^\theta X_s^x ds} \right)$.
7. Montrer que $\int_0^\theta X_s^x ds$ est une gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance puis calculer $F(\theta, x)$.
8. En déduire que
$$P(t,T) = e^{(T-t)R(T-t,r_t)},$$
où $R(T-t, r_t)$, le taux d'intérêt moyen sur la période $[t,T]$, est donné par la formule
$$R(\theta, r) = R_\infty - \frac{1}{a\theta}\left((R_\infty - r)(1 - e^{a\theta}) - \frac{\sigma^2}{4a^2}(1 - e^{a\theta})^2 \right)$$
avec $R_\infty = \lim_{\theta \to +\infty} R(\theta, r) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$.

9. Écrire l'équation différentielle stochastique satisfaite par $P(t,T)$. Vérifier que, dans le modèle de Vasicek, la volatilité du zéro-coupon est déterministe et vaut

$$\sigma_t^T = -\frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right).$$

Dans le modèle de Vasicek, on ne peut pas en général calibrer le modèle à tous les prix $P^{obs}(T)$ des zéro-coupons observés sur le marché à $t = 0$. Le modèle de Vasicek généralisé, $dr_t = a(b(t) - r_t)dt + \sigma dW_t$, où b est une fonction déterministe du temps, permet ce calibrage. La fonction b, supposée dérivable, joue le rôle d'un paramètre de dimension infinie - infinie comme le nombre de prix de zéro-coupons qu'on souhaite calibrer. On pose $X_t = r_t - b(t)$.

10. Montrer que $\int_0^T X_t dt \sim \mathcal{N}(m_T, v_T)$ avec

$$\begin{aligned} m_T &= \frac{1}{a}\left(X_0\left(1 - e^{-aT}\right) - b(T) + b(0) + \int_0^T e^{-a(T-u)} b'(u) du\right) \\ v_T &= \frac{\sigma^2}{a^2}\left(T + \frac{1 - e^{-2aT}}{2a} - 2\frac{1 - e^{-aT}}{a}\right) \end{aligned}$$

11. En déduire $P(0,T)$.
12. On note $f(0,T) = -\frac{\partial \ln P(0,T)}{\partial T}$ le taux forward instantané de maturité T à la date 0. Calculer $\frac{\partial f}{\partial T}(0,T) + af(0,T)$ et en déduire que le modèle permet de retrouver les prix observés $P^{obs}(T)$ si et seulement si

$$b(t) = \frac{1}{a}\frac{\partial f^{obs}}{\partial T}(t) + f^{obs}(t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-2at}),$$

où $f^{obs} = -\frac{\partial \ln P^{obs}(T)}{\partial T}$.