# Méthodes mathématiques pour la finance : TD 2

Lancer un navigateur à l'adresse http://cermics.enpc.fr/$\sim$jourdain/mathfi/mathfi.html.

On considère le modèle de Cox-Ross-Rubinstein : il y a un seul actif risqué, de prix $S_n$ à l'instant $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, et un actif sans risque de rendement certain $r$ sur une période : $S_n^0 = (1+r)^n$. Le prix de l'actif risqué obéit à la dynamique suivante :

$$\text{pour } n \in \{0, \ldots, N-1\},\ S_{n+1} = S_n T_{n+1}$$

où $(T_n)_{1 \le n \le N}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $\mathbb{P}(T_n = 1+a) = p$ et $\mathbb{P}(T_n = 1+b) = 1-p$ avec $p \in ]0, 1[$. On supposera que $1+a$ (down) est strictement plus petit que $1+b$ (up) et on considérera les valeurs numériques suivantes :

— valeur initiale $S_0 = 100$,
— prix d'exercice $K = 100$,
— nombre de pas de temps $N = 10$,
— une date de maturité de $T = 4$ mois.

On choisira les paramètres $a$ et $b$ de façon à converger vers le modèle de Black et Scholes (voir livre). On note

— $\Delta t = T/N$, le pas de temps du modèle,
— $r = \exp(R * \Delta t) - 1$ le taux de rendement sur un pas de temps, où $R = 2\%$ représente le taux court,
— $1 + a = (1+r) * \exp\left(-\sigma * \sqrt{\Delta t}\right)$, où $\sigma = 20\%$ représente le paramètre de volatilité dans le modèle de Black-Scholes,
— $1 + b = (1+r) * \exp\left(\sigma * \sqrt{\Delta t}\right)$.

Exécuter le fichier Constantes.py

## Couverture d'un Put dans le modèle CRR

1. Proposer une méthode de simulation du vecteur $(S_0, \ldots, S_N)$. Compléter la ligne correspondante dans le fichier S.py. Visualiser des trajectoires typiques pour différentes valeurs de $p$.
2. Soit $\mathbb{P}^*$ la probabilité sous laquelle les variables aléatoires $(T_n)_{1 \le n \le N}$ sont i.i.d avec

$$\mathbb{P}^*(T_n = 1+a) = p^* = \frac{b-r}{b-a} = 1 - \mathbb{P}^*(T_n = 1+b).$$

   Pourquoi doit-on calculer les prix des actifs en utilisant la probabilité $\mathbb{P}^*$ ? Donner le prix à l'instant $n$ du put européen d'échéance $N$ et de prix d'exercice $K$ sous la forme d'une espérance conditionnelle et vérifier qu'il s'écrit comme $P(n, S_n)$ pour une fonction $P(n, x)$ à préciser. Noter que malgré la diversité des trajectoires obtenues à la question précédente, ce prix ne depend pas de la valeur de $p$ !
3. Montrer que $P(n, x)$ vérifie $P(N, x) = (K - x)^+$ et que, pour $n < N$ :

$$P(n, x) = \frac{p^*}{1+r} P\left(n+1, x(1+a)\right) + \frac{1-p^*}{1+r} P\left(n+1, x(1+b)\right)$$

   Dans le fichier Prix_en_zero.py, compléter la fonction `Prix_rec(n,N,K,p1,p2,a,b,x)` pour obtenir un algorithme récursif, exploitant cette relation et permettant d'évaluer le prix à l'instant $n$ d'un put de payoff $(K - S_N)^+$ en $N$.

   Vérifier que (ou mieux comprendre pourquoi) l'algorithme itératif `Prix_en_zero(N,K,r,a,b,x)` permet d'évaluer (beaucoup plus efficacement) le prix du put à l'instant 0.

   Compléter la fonction `Prix_MC_en_zero(M,N,K,r,a,b,S0)` pour retrouver le prix en 0 en calculant $\mathbb{E}^*\left(\frac{(K-S_N)^+}{(1+r)^N}\right)$ par la méthode de Monte Carlo.
4. En déduire dans fichier Prix.py, une fonction `Prix(n,N,K,r,a,b,x)` exprimant le prix à l'instant $n$ si l'actif risqué vaut $x$ à cet instant.

5. Montrer que la quantité d'actifs risqués à détenir sur l'intervalle $]n-1,n]$ pour se couvrir parfaitement est donnée par :
$$\Delta(n,S_{n-1}) = \frac{P(n,S_{n-1}(1+b)) - P(n,S_{n-1}(1+a))}{S_{n-1}(b-a)}.$$
En déduire, dans le fichier Couverture.py, une fonction calculant la couverture à l'instant $n$ si le prix de l'actif vaut $x$ à cet instant et utilisant la fonction `Prix(n,N,K,r,a,b,x)`.

6. Dans le fichier Defaut_de_couverture.py compléter l'expression de la valeur du portefeuille de couverture en $n$ puis le montant investi en actif sans risque sur la période $]n,n+1]$. Le programme simule $q=20$ trajectoires de $(S_n)_{0\leq n\leq N}$ pour $p=0.5$, représente les 20 couples $(S_N,V_N)$ correspondants où $V_N$ est la valeur terminale du portefeuille de réplication et calcule la norme euclidienne des 20 valeurs de $(K-S_N)^+ - V_N$. Vérifier que la couverture fonctionne quelle que soit la valeur de $p$.

7. Écrire un algorithme récursif qui permet de pricer le put américain. Fichier Prix_Americaines.py. Comparer le prix du put américain et celui du put européen à l'instant 0. Idem pour le call. Commenter.
Construire le portefeuille de couverture du put Américain. Vérifier que le portefeuille ainsi constitué permet de se couvrir parfaitement (quelle que soit la stratégie d'exercice et quelle que soit la probabilité historique servant à la simulation). Fichier Couverture_Americaines.py.