Méthodes mathématiques pour la finance :
Processus de Poisson

Théorème 1 *Soient* $(T_i)_{i\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$ *et* $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ *pour* $n \geq 1$. *Alors* $\left(N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{\{S_n \leq t\}}\right)_{t\geq 0}$ *est un processus de Poisson de paramètre* λ.

Démonstration : Pour $t \geq s \geq 0$ et $k, \ell \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_s = k, N_t - N_s = \ell) = \mathbb{P}(N_s = k, N_t = k + \ell) \\
&= \mathbb{P}(T_1 + \ldots + T_k \leq s < T_1 + \ldots + T_{k+1}, T_1 + \ldots + T_{k+\ell} \leq t < T_1 + \ldots + T_{k+\ell+1}) \\
&= \int_{[0,+\infty)^{k+\ell+1}} 1_{\{t_1+\ldots+t_k \leq s < t_1+\ldots+t_{k+1}, t_1+\ldots+t_{k+\ell}\leq t\}} \\
&\qquad\qquad 1_{\{t_{k+\ell+1} > t-(t_1+\ldots+t_{k+\ell})\}} \lambda^{k+\ell+1} e^{-\lambda(t_1+\ldots+t_{k+\ell+1})} dt_{k+\ell+1}\ldots dt_1.
\end{aligned}$$

On commence par intégrer sur la variable $t_{k+\ell+1}$. Pour $t_1 + \ldots + t_{k+\ell} \leq t$,

$$\int_{[0,+\infty)} 1_{\{t_{k+\ell+1} > t-(t_1+\ldots+t_{k+\ell})\}} \lambda e^{-\lambda t_{k+\ell+1}} dt_{k+\ell+1} = \left[-e^{-\lambda t_{k+\ell+1}}\right]_{t-(t_1+\ldots+t_{k+\ell})}^{+\infty} = e^{-\lambda(t-(t_1+\ldots+t_{k+\ell}))}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(N_s = k, N_t - N_s = \ell) = \int_{[0,+\infty)^{k+\ell}} 1_{\{t_1+\ldots+t_k \leq s < t_1+\ldots+t_{k+1}, t_1+\ldots+t_{k+\ell}\leq t\}} \lambda^{k+\ell} e^{-\lambda t} dt_{k+\ell}\ldots dt_1.$$

En effectuant le changement de variable linéaire $s_1 = t_1$, $s_2 = t_1 + t_2$,..., $s_{k+\ell} = t_1 + \ldots + t_{k+\ell}$ de jacobien 1 car la matrice de cette application linéaire dans la base canonique est triangulaire avec des 1 sur la diagonale et son déterminant vaut 1, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_s = k, N_t - N_s = \ell) = e^{-\lambda t}\lambda^{k+\ell} \int_{0\leq s_1\leq s_2\leq\ldots\leq s_k\leq s<s_{k+1}\leq\ldots\leq s_{k+\ell}\leq t} ds_{k+\ell}\ldots ds_1 \\
&= e^{-\lambda t}\lambda^{k+\ell} \int_{0\leq s_1\leq s_2\leq\ldots\leq s_k\leq s} ds_k\ldots ds_1 \int_{s<s_{k+1}\leq\ldots\leq s_{k+\ell}\leq t} ds_{k+\ell}\ldots ds_{k+1} \\
&= e^{-\lambda t}\lambda^{k+\ell} \int_{0\leq s_1\leq s_2\leq\ldots\leq s_k\leq s} ds_k\ldots ds_1 \int_{0<s_1\leq\ldots\leq s_\ell\leq t-s} ds_\ell\ldots ds_1.
\end{aligned}$$

En notant $\mathcal{S}_k$ l'ensemble des permuations de $\{1,\ldots,k\}$, on a

$$\int_{0\leq s_1\leq s_2\leq\ldots\leq s_k\leq s} ds_k\ldots ds_1 = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k}\int_{0\leq s_{\sigma(1)}\leq s_{\sigma(2)}\leq\ldots\leq s_{\sigma(k)}\leq s} ds_k\ldots ds_1 = \frac{1}{k!}\int_{[0,s]^k} ds_k\ldots ds_1 = \frac{s^k}{k!},$$

formule qui peut également se démontrer par récurrence sur k. On conclut que

$$\mathbb{P}(N_s = k, N_t - N_s = \ell) = e^{-\lambda t}\lambda^{k+\ell}\frac{s^k}{k!} \times \frac{(t-s)^\ell}{\ell!} = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^\ell}{\ell!}$$

si bien que $N_s \sim \mathcal{P}(\lambda s)$, $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t-s))$ avec les deux variables aléatoires indépendantes. Le calcul que nous venons d'effectuer pour deux accroissements se généralise aisément à un nombre quelconque d'accroissements.

$\square$