Méthodes mathématiques pour la finance

Examen du 29 mai 2019 (8h30-11h00)

On se donne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On se place dans le cadre du modèle de Black&Scholes sur l'intervalle de temps $[0,T]$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t (avec $r > 0$) et un actif risqué de prix S_t à l'instant t dont l'évolution est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt,\ S_0 = s_0$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité, $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement et $s_0 > 0$ le cours initial de l'actif. On notera $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

Limite $\sigma \to +\infty$ du prix du Call

On note $c(\sigma)$ la prime à l'instant initial du Call européen de maturité T et de prix d'exercice K pour la volatilité σ.

1. **Exprimer c sous forme d'une espérance sous $\mathbb{P}^*$.**

$$c(\sigma) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(s_0 e^{\sigma W_T + (r-\frac{\sigma^2}{2})T} - K)^+]$$

2. **Que vaut $\mathbb{E}^*[e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}]$?**
   Comme $(e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t})_{t\in[0,T]}$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale exponentielle, $\mathbb{E}^*[e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}] = 1$.

3. **Quel est le comportement asymptotique presque sûr de $e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}$ lorsque $\sigma \to \infty$?**
   Lorsque $\sigma \to +\infty$, presque sûrement, $\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T \to -\infty$ et $e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} \to 0$.

4. **En déduire que $\mathbb{E}^*[\sup_{\sigma>0} e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}] = +\infty$.**
   Comme $\mathbb{E}^*[\lim_{\sigma\to\infty} e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}] = 0 \neq 1 = \lim_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}^*[e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}]$, le théorème de convergence dominée entraîne que $\mathbb{E}^*[\sup_{\sigma>0} e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}] = +\infty$.
   Calculer $\sup_{\sigma>0} e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}$ et retrouver ce résultat.
   Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sup_{\sigma>0}(\sigma x - \frac{\sigma^2}{2}T) = 1_{\{x>0\}}\frac{x^2}{2T}$ avec le supremum atteint pour $\sigma = \frac{x}{T}$ lorsque $x > 0$ et pour $\sigma \to 0$ sinon. Par croissance et continuité de l'exponentielle, on en déduit que $\sup_{\sigma>0} e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} = 1_{\{W_T\leq 0\}} + 1_{\{W_T>0\}} e^{\frac{W_T^2}{2T}}$ si bien que

$$\mathbb{E}^*\left[\sup_{\sigma>0} e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}\right] = \mathbb{P}^*(W_T \leq 0) + \int_0^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi T}} = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi T}} = +\infty.$$

5. **Quel est le comportement asymptotique presque sûr de $(s_0 e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} - Ke^{-rT})^+$ lorsque $\sigma \to \infty$?**
   D'après la question 3, $\lim_{\sigma\to\infty}(s_0 e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} - Ke^{-rT})^+ = 0$.

6. **Montrer que**

$$c(\sigma) = s_0 - \mathbb{E}^*\left[s_0 e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} 1_{\{s_0 e^{\sigma W_T + (r-\frac{\sigma^2}{2})T} \leq K\}}\right] - Ke^{-rT}\mathbb{P}^*(s_0 e^{\sigma W_T + (r-\frac{\sigma^2}{2})T} > K).$$

On écrit

$$e^{-rT}(s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}-K)^+ = e^{-rT}(s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}-K)1_{\{s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}>K\}}$$
$$= s_0e^{\sigma W_T-\frac{\sigma^2}{2}T}\left(1-1_{\{s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\leq K\}}\right)-Ke^{-rT}1_{\{s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}>K\}}$$

avant de prendre l'espérance et d'utiliser le résultat de la question 2.

7. **Montrer que** $\lim_{\sigma\to\infty}\mathbb{E}^*\left[s_0e^{\sigma W_T-\frac{\sigma^2}{2}T}1_{\{s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\leq K\}}\right]=0$**. Quel est le comportement asymptotique de** $\mathbb{P}^*(s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}>K)$ **lorsque** $\sigma\to\infty$ **? En déduire** $\lim_{\sigma\to+\infty}c(\sigma)$**.**
   Comme $0\leq s_0e^{\sigma W_T-\frac{\sigma^2}{2}T}1_{\{s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\leq K\}}\leq K$, la convergence presque sûre de la question 3 et le théorème de convergence dominée assurent que
   $$\lim_{\sigma\to\infty}\mathbb{E}^*\left[s_0e^{\sigma W_T-\frac{\sigma^2}{2}T}1_{\{s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\leq K\}}\right]=0.$$
   On a $\mathbb{P}^*(s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}>K)=\mathbb{E}^*\left[1_{\{s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}>K\}}\right]$ où l'espérance tend vers 0, toujours par convergence dominée. La décomposition de la question précédente entraîne donc que $\lim_{\sigma\to\infty}c(\sigma)=s_0$.

Option passeport

Une option passeport donne le droit à son acheteur de choisir un processus $\Delta=(\Delta_t)_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans $[-1,1]$ et toucher à maturité T la partie positive $(X_T^\Delta)^+$ de la valeur en T du portefeuille autofinancé de valeur initiale x_0 et qui consiste à détenir Δ_t actif risqué en $t\in[0,T]$. On note X_t^Δ la valeur de ce portefeuille en $t\in[0,T]$ et on pose $w(\Delta)=\mathbb{E}^*[e^{-rT}(X_T^\Delta)^+]$.

1. **Exprimer en fonction de** S_t^0, X_t^Δ, Δ_t **et** S_t **la quantité d'actif sans risque détenue en** t **dans ce portefeuille ?** $\frac{X_t^\Delta-\Delta_tS_t}{S_t^0}$

On pose $Y_t^\Delta=X_t^\Delta/S_t$.

2. **En appliquant un résultat vu en TD, dont on rappellera le nom, vérifier que l'autofinancement s'écrit** $dY_t^\Delta=(X_t^\Delta-\Delta_tS_t)e^{-rt}dU_t$ **où** $U_t=S_t^0/S_t$**.**
   On applique la technique de *changement de numéraire* vue dans le TD7 en utilisant l'actif risqué comme numéraire (les prix s'expriment alors en quantités d'actif risqué). Comme l'autofinancement est invariant par changement de numéraire, il s'écrit alors
   $$dY_t^\Delta=d\left(\frac{X^\Delta}{S}\right)_t=\Delta_td\left(\frac{S}{S}\right)_t+\frac{X_t^\Delta-\Delta_tS_t}{S_t^0}d\left(\frac{S^0}{S}\right)_t=0+(X_t^\Delta-\Delta_tS_t)e^{-rt}dU_t.$$

3. **Calculer** U_t **et en déduire que** $dY_t^\Delta=\sigma(\Delta_t-Y_t^\Delta)(dW_t-\sigma dt)$**.**
   On a $U_t=\frac{1}{\tilde{S}_t}=\frac{1}{s_0}e^{-\sigma W_t+\frac{\sigma^2}{2}t}$. En appliquant la formule d'Itô au processus d'Itô $-\sigma W_t+\frac{\sigma^2}{2}t$ de crochet σ^2t avec la fonction $x\mapsto\frac{1}{s_0}e^x$ de dérivées successives égales à elle-même, il vient
   $$dU_t=U_t\left(-\sigma dW_t+\frac{\sigma^2}{2}dt\right)+\frac{1}{2}U_t\sigma^2t=U_t(-\sigma dW_t+\sigma^2dt).$$

En reportant cette égalité dans la formule de la question précédente, il vient

$$dY_t^\Delta = (X_t^\Delta - \Delta_t S_t)e^{-rt}\frac{S_t^0}{S_t}(-\sigma dW_t + \sigma^2 dt) = \sigma(\Delta_t - Y_t^\Delta)(dW_t - \sigma dt).$$

4. **Pourquoi peut-on définir une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ de densité $\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = \frac{e^{-rT}S_T}{s_0}$ par rapport à $\mathbb{P}^*$?** On a $\mathbb{P}^*(\frac{e^{-rT}S_T}{s_0} \geq 0) = 1$ et, d'autre part, comme $(\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathbb{P}^*$ martingale exponentielle, $\mathbb{E}^*[\frac{e^{-rT}S_T}{s_0}] = \frac{\mathbb{E}^*[\tilde{S}_T]}{s_0} = \frac{s_0}{s_0} = 1$.
   Que peut-on dire du processus $(\beta_t = W_t - \sigma t)_{t\in[0,T]}$ sous cette probabilité $\hat{\mathbb{P}}$? Comme $\frac{e^{-rT}S_T}{s_0} = e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}$, le théorème de Girsanov assure que $(\beta_t = W_t - \sigma t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien sous $\hat{\mathbb{P}}$.

On note désormais $\hat{\mathbb{E}}$ l'espérance sous la probabilité $\hat{\mathbb{P}}$.

5. **Pourquoi l'équation différentielle stochastique**

$$dZ_t = \sigma(1 + |Z_t|)d\beta_t,\ Z_0 = z_0$$

   admet-elle une unique solution pour toute condition initiale $z_0 \in \mathbb{R}$? Le coefficient $z \mapsto \sigma(1+|z|)$ étant Lipschitzien de constante σ, le théorème d'Itô (voir le théorème 3.5.3 de la 3ème édition du Lamberton/Lapeyre) assure l'existence d'une unique solution à cette équation.
6. **Justifier que $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable sous $\hat{\mathbb{P}}$ et en déduire que pour $s \in [0,T]$, $Z_s^+ \leq \hat{\mathbb{E}}[Z_T^+|\mathcal{F}_s]$.**
   Le même théorème assure que $\hat{\mathbb{E}}[\sup_{t\in[0,T]} Z_t^2] < \infty$. Donc

$$\hat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T (\sigma(1+|Z_t|))^2 dt\right] \leq \sigma^2 \int_0^T \hat{\mathbb{E}}[2(1^2 + |Z_t|^2)]dt \leq 2\sigma^2 T(1 + \hat{\mathbb{E}}[\sup_{t\in[0,T]} Z_t^2]) < \infty. \tag{1}$$

   Cette condition d'intégrabilité assure que l'intégrale stochastique $(\int_0^t \sigma(1+|Z_s|)d\beta_s)_{t\in[0,T]}$ par rapport au mouvement brownien β_t sous $\hat{\mathbb{P}}$ est une $\hat{\mathbb{P}}$-martingale de carré intégrable. Il en va de même pour $(Z_t = z_0 + \int_0^t \sigma(1+|Z_s|)d\beta_s)_{t\in[0,T]}$. L'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle et la fonction convexe $z \mapsto z^+$ entraîne alors que pour $s \in [0,T]$, $\hat{\mathbb{E}}[Z_T^+|\mathcal{F}_s] \geq (\hat{\mathbb{E}}[Z_T|\mathcal{F}_s])^+ = Z_s^+$.

On admet l'existence d'une solution $v(t,z)$ continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ et $C^{1,2}$ avec $\partial_z v$ bornée sur $[0,T[\times\mathbb{R}$ à l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases}\partial_t v(t,z) + \frac{\sigma^2}{2}(1+|z|)^2\partial_{zz}v(t,z) = 0,\ (t,z) \in [0,T[\times\mathbb{R}, \\ v(T,z) = z^+,\ z \in \mathbb{R}\end{cases} \tag{2}$$

7. **Soit $s \in [0,T[$. Calculer $dv(t+s,Z_t)$ pour $t \in [0,T-s[$.**
   En déduire que $(v(t+s,Z_t))_{t\in[0,T-r]}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$. Par la formule d'Itô puis l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction v, pour $t \in [0,T-s[$,

$$\begin{aligned}dv(t+s,Z_t) &= \partial_t v(t+s,Z_t)dt + \partial_z v(t+s,Z_t)dZ_t + \frac{1}{2}\partial_{zz}v(t+s,Z_t)d\langle Z\rangle_t \\ &= \partial_z v(t+s,Z_t)\sigma(1+|Z_t|)d\beta_t + \left(\partial_t v(t+s,Z_t) + \frac{\sigma^2}{2}(1+|Z_t|)^2\partial_{zz}v(t+s,Z_t)\right)dt \\ &= \partial_z v(t+s,Z_t)\sigma(1+|Z_t|)d\beta_t + 0.\end{aligned}$$

Or, en notant $M = \sup_{(t,z)\in[0,T[\times\mathbb{R}} |\partial_z v(t,z)|$, et en utilisant (1), pour la seconde inégalité, on obtient

$$\hat{\mathbb{E}}\left[\int_0^{T-s}(\partial_z v(t+s,Z_t)\sigma(1+|Z_t|))^2 ds\right] \leq M^2\hat{\mathbb{E}}\left[\int_0^{T-s}(\sigma(1+|Z_t|))^2 ds\right] < \infty.$$

Donc $(v(s,z_0)+\int_0^t \partial_z v(u+s,Z_u)\sigma(1+|Z_u|)d\beta_u)_{t\in[0,T-s]}$ est une $\hat{\mathbb{P}}$-martingale de carré intégrable continue qui, d'après le premier calcul effectué dans cette question, coincide avec $v(t+s,Z_t)$ sur $[0,T-s[$. Par ailleurs, par continuité de v sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ et de $(Z_t)_{t\in[0,T]}$,

$$\hat{\mathbb{P}}\left(\lim_{t\to T-s} v(t+s,Z_t) = v(T,Z_{T-s})\right) = 1.$$

Ainsi l'égalité $v(t+s,Z_t) = v(s,z_0)+\int_0^t \partial_z v(u+s,Z_u)\sigma(1+|Z_u|)d\beta_u$ est vraie pour tout $t\in[0,T-s]$ si bien que $(v(t+s,Z_t))_{t\in[0,T-s]}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable sous $\hat{\mathbb{P}}$.

8. **Soient $t,s\geq 0$ tels que $t+s\leq T$. Montrer que $v(t+s,Z_t) = \hat{\mathbb{E}}[Z_{T-s}^+|\mathcal{F}_t]$ et $v(t,Z_t) = \hat{\mathbb{E}}[Z_T^+|\mathcal{F}_t]$ et en déduire que $v(t,Z_t)\geq v(t+s,Z_t)$.** D'après la question précédente puis la condition terminale dans l'équation aux dérivées partielles (2),

$$v(t+s,Z_t) = \hat{\mathbb{E}}[v(T-s+s,Z_{T-s})|\mathcal{F}_t] = \hat{\mathbb{E}}[v(T,Z_{T-s})|\mathcal{F}_t] = \hat{\mathbb{E}}[Z_{T-s}^+|\mathcal{F}_t].$$

Pour le choix $s=0$ puis en utilisant que $T-s\geq t$ et l'inégalité de la question 6, on en déduit que

$$v(t,Z_t) = \hat{\mathbb{E}}[Z_T^+|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_T^+|\mathcal{F}_{T-s}]|\mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[Z_{T-s}^+|\mathcal{F}_t] = v(t+s,Z_t).$$

9. **Quel est le signe de $\partial_t v$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$? En déduire que pour tout $t\in[0,T[$, $z\mapsto v(t,z)$ est convexe.** D'après la question précédente, v est décroissante dans sa première variable si bien que $\partial_t v\leq 0$. En utilisant (2), on en déduit que $\partial_{zz}v(t,z) = -\frac{2}{\sigma^2(1+|z|)^2}\partial_t v(t,z)\geq 0$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$ si bien que pour tout $t\in[0,T[$, $z\mapsto v(t,z)$ est convexe.

10. **On pose $V_t^\Delta = v(t,Y_t^\Delta)$. Vérifier que pour $t\in[0,T[$,**

$$dV_t^\Delta = \sigma\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t - Y_t^\Delta)d\beta_t + D_t dt,$$

où $D_t = \frac{\sigma^2}{2}\partial_{zz}v(t,Y_t^\Delta)[(\Delta_t-Y_t^\Delta)^2-(1+|Y_t^\Delta|)^2]$. Quel est le signe de D_t pour $t\in[0,T[$? En utilisant la formule d'Itô puis l'expression de dY_t^Δ obtenue à la question 3 et enfin l'équation aux dérivées partielles (2), on obtient

$$\begin{aligned}
dV_t^\Delta &= \partial_t v(t,Y_t^\Delta)dt + \partial_z v(t,Y_t^\Delta)dY_t^\Delta + \frac{1}{2}\partial_{zz}v(t,Y_t^\Delta)d\langle Y^\Delta\rangle_t \\
&= -\frac{\sigma^2}{2}\partial_{zz}v(t,Y_t^\Delta)(1+|Y_t^\Delta|)^2 dt + \sigma\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta)d\beta_t + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{zz}v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta)^2 dt \\
&= \sigma\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta)d\beta_t + D_t dt.
\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire et comme Δ_t prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$, on a $|\Delta_t - Y_t^\Delta|\leq|\Delta_t|+|Y_t^\Delta|\leq 1+|Y_t^\Delta|$ si bien que $(\Delta_t-Y_t^\Delta)^2-(1+|Y_t^\Delta|)^2\leq 0$. Comme $\partial_{zz}v\geq 0$ d'après la question précédente, on en déduit que $D_t\leq 0$.

11. **En déduire que** $v(0,Y_0^\Delta)+\sigma\int_0^T 1_{\{t\leq\tau_n\}}\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta)d\beta_t \geq (Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)^+$ **où** $\tau_n=\inf\{t\in[0,T]:|Y_t^\Delta|\geq n\}$ **avec** $n\in\mathbb{N}^*$**. Justifier que** $\liminf_{n\to\infty}\hat{\mathbb{E}}\left[(Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)^+\right]\geq \frac{w(\Delta)}{s_0}$ **et conclure que** $s_0v(0,\frac{x_0}{s_0})\geq\sup_\Delta w(\Delta)$**. Quel choix de processus** $\Delta=(\Delta_t)_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{F}_t$**-adapté à valeurs dans** $[-1,1]$ **semble atteindre cette borne supérieure ? Quelle équation faut-il savoir résoudre pour justifier ce choix ?**
En utilisant successivement la condition terminale de l'équation aux dérivées partielles (2), la décroissance de v dans la variable temporelle, l'inégalité $D_t\leq 0$ et enfin l'expression de $dv(t,Y_t^\Delta)$ obtenue à la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}(Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)^+ = v(T,Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)\leq v(T\wedge\tau_n,Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)&\leq v(T\wedge\tau_n,Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)-\int_0^{T\wedge\tau_n}D_tdt\\ &=v(0,Y_0^\Delta)+\sigma\int_0^T 1_{\{t\leq\tau_n\}}\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta)d\beta_t.\end{aligned}$$

Comme $\hat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T(1_{\{t\leq\tau_n\}}\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta))^2dt\right]\leq M^2(n+1)^2T$, l'espérance sous $\hat{\mathbb{P}}$ de l'intégrale stochastique est nulle si bien que $\hat{\mathbb{E}}[(Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)^+]\leq\hat{\mathbb{E}}[v(0,Y_0^\Delta)]$, où, comme $Y_0^\Delta=\frac{x_0}{s_0}$, le membre de droite vaut $v(0,\frac{x_0}{s_0})$.
Par continuité du processus d'Itô $(Y_t^\Delta)_{t\in[0,T]}$, en prenant la convention $\inf\emptyset=T$ dans la définition de τ_n, on a

$$\hat{\mathbb{P}}\left(\lim_{n\to\infty}\tau_n=T\right)=1=\hat{\mathbb{P}}\left(\lim_{n\to\infty}(Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)^+=(Y_T^\Delta)^+\right)$$

si bien que, par le lemme de Fatou,

$$\liminf_{n\to\infty}\hat{\mathbb{E}}\left[(Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)^+\right]\geq\hat{\mathbb{E}}\left[(Y_T^\Delta)^+\right]=\mathbb{E}^*\left[\frac{e^{-rT}S_T}{s_0}(Y_T^\Delta)^+\right]=\frac{\mathbb{E}^*[e^{-rT}(X_T^\Delta)^+]}{s_0}=\frac{w(\Delta)}{s_0}.$$

En passant à la limite $n\to\infty$ dans l'inégalité $v(0,\frac{x_0}{s_0})\geq\hat{\mathbb{E}}[(Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)^+]$, on en déduit que $v(0,\frac{x_0}{s_0})\geq\frac{w(\Delta)}{s_0}$ puis comme Δ est arbitraire que $s_0v(0,\frac{x_0}{s_0})\geq\sup_\Delta w(\Delta)$.
Pour atteindre cette borne il faut que $D_t=0$ c'est-à-dire que

$$(\Delta_t-Y_t^\Delta)^2=(1+|Y_t^\Delta|)^2$$

équation qui se récrit $\Delta_t=-\text{signe}(Y_t^\Delta)$ avec la fonction $\text{signe}(y)=1_{\{y>0\}}-1_{\{y<0\}}$.
Avec la dynamique de Y_t^Δ donnée à la question 3, cela demande de savoir résoudre l'équation différentielle stochastique $dY_t=-\sigma(\text{signe}(Y_t)+Y_t)d\beta_t$ dont le coefficient $y\mapsto-\sigma(\text{signe}(y)+y)$ est une fonction discontinue en 0.

12. **On note** $\tilde{S}_t=e^{-rt}S_t$**. Donner** $d\tilde{S}_t$ **en fonction de** dW_t**, calculer** $d(\tilde{S}_tV_t^\Delta)$ **et en déduire que**

$$e^{-rT}(X_T^\Delta)^+\leq s_0v\left(0,\frac{x_0}{s_0}\right)+\int_0^T(V_t^\Delta+\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta))\sigma\tilde{S}_tdW_t.$$

D'après le cours, $d\tilde{S}_t=\sigma\tilde{S}_tdW_t=\sigma\tilde{S}_t(d\beta_t+\sigma dt)$. Par la formule d'intégration par parties puis l'inégalité $D_t\leq 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}d(\tilde{S}_tV_t^\Delta)=&\tilde{S}_t(\sigma\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta)(dW_t-\sigma dt)+D_tdt)\\ &+\sigma V_t^\Delta\tilde{S}_tdW_t+\sigma^2\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta)\tilde{S}_tdt\\ =&(V_t^\Delta+\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta))\sigma\tilde{S}_tdW_t+\tilde{S}_tD_tdt\\ \leq&(V_t^\Delta+\partial_z v(t,Y_t^\Delta)(\Delta_t-Y_t^\Delta))\sigma\tilde{S}_tdW_t.\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et T puis en utilisant $V_T^\Delta = v(T, Y_T^\Delta) = (Y_T^\Delta)^+$ et $V_0^\Delta = v(0, \frac{x_0}{s_0})$, on obtient

$$\int_0^T (V_t^\Delta + \partial_z v(t, Y_t^\Delta)(\Delta_t - Y_t^\Delta))\sigma \tilde{S}_t dW_t \geq \tilde{S}_T V_T^\Delta - s_0 V_0^\Delta = \tilde{S}_T (Y_T^\Delta)^+ - s_0 v\left(0, \frac{x_0}{s_0}\right)$$
$$= e^{-rT}(X_T^\Delta)^+ - s_0 v\left(0, \frac{x_0}{s_0}\right).$$

13. **Quelle est l'évolution de la valeur actualisée $\tilde{V}_t$ d'un portefeuille autofinancé qui consiste à détenir $v(t, Y_t^\Delta) + \partial_z v(t, Y_t^\Delta)(\Delta_t - Y_t^\Delta)$ actif risqué en t ? Conclure qu'en gérant celui de valeur initiale $s_0 v(0, \frac{x_0}{s_0})$, le vendeur de l'option (qui observe le processus Δ) surcouvre l'option passeport.** D'après le cours, $d\tilde{V}_t = \sigma(v(t, Y_t^\Delta) + \partial_z v(t, Y_t^\Delta)(\Delta_t - Y_t^\Delta))\tilde{S}_t dW_t$. Si la valeur initiale du portefeuille est $s_0 v(0, \frac{x_0}{s_0})$, alors on a, en utilisant la question précédente pour l'inégalité,

$$\tilde{V}_T = s_0 v\left(0, \frac{x_0}{s_0}\right) + \int_0^T \sigma(v(t, Y_t^\Delta) + \partial_z v(t, Y_t^\Delta)(\Delta_t - Y_t^\Delta))\tilde{S}_t dW_t \geq e^{-rT}(X_T^\Delta)^+.$$

Ainsi $V_T \geq (X_T^\Delta)^+$ et la valeur terminale de ce portefeuille est supérieure au payoff de l'option passeport si bien que le vendeur est couvert.