Méthodes mathématiques pour la finance

Examen du 1er juin 2016 (8h30-11h00)

On se donne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\in[0,T]}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t))_{t\in[0,T]}$.

Problème : couverture en temps discret d'une option européenne vanille dans le modèle de Black&Scholes

On se place dans le cadre du modèle de Black&Scholes sur l'intervalle de temps $[0,T]$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t (avec $r > 0$) et un actif risqué de prix S_t à l'instant t. L'évolution du processus $(S_t)_{t\in[0,T]}$ est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma S_t \, dB_t + \mu S_t \, dt$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité et $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement de l'actif. On notera $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ une fonction de payoff C^2 vérifiant $\sup_{x>0} |f'(x)| < \infty$.

1. Donner sans preuve sous forme d'espérance conditionnelle le prix à l'instant $t \in [0,T]$ de l'option européenne qui rapporte $f(S_T)$ à l'échéance T.
2. Montrer que ce prix se met sous la forme $F(t, S_t)$ avec $F(t,x)$ une fonction que l'on précisera sous forme d'espérance portant sur W_{T-t}.

On pose $\varphi(t,x) = \partial_x F(t,x)$.

3. Quel rôle joue la quantité $\varphi(t, S_t)$ pour le vendeur de l'option ?
4. Rappeler sans la démontrer l'équation aux dérivées partielles avec condition terminale vérifiée par la fonction $F(t,x)$ pour $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^*$?
5. En déduire que φ satisfait

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_{xx}\varphi(t,x) + (r + \sigma^2) x \partial_x \varphi(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^* \\ \varphi(T,x) = f'(x), \ x \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

6. Que peut-on dire du processus $(e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t})_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{P}^*$?
7. En dérivant sous le signe espérance, vérifier que

$$\varphi(t,x) = \mathbb{E}^* \left[e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} f' \left(x e^{\sigma W_{T-t} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \right) \right].$$

8. Que peut-on dire de $(\beta_t = W_t - \sigma t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{Q}$ telle que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^*} = e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2 T}{2}}$? En déduire l'EDP satisfaite par $\psi(t,x) = e^{-\rho(T-t)}\varphi(t,x)$ où $\rho = r + \sigma^2$ puis retrouver celle satisfaite par φ.

En pratique, on ne peut bien sûr pas modifier la composition du portefeuille de couverture en temps continu. On va s'intéresser à l'erreur de couverture introduite en rebalançant le portefeuille sur la grille discrète $(t_k = \frac{kT}{N})_{0\leq k\leq N}$ où $N \in \mathbb{N}^*$. On note V_t^N (resp.

$\tilde{V}_t^N = e^{-rt}V_t^N$) la valeur (resp. la valeur actualisée) en $t \in [0,T]$ du portefeuille autofinancé de valeur initiale $F(0,S_0)$ et qui consiste à détenir $\varphi(t_k, S_{t_k})$ unités d'actif risqué sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$. Pour $t \in [0,T]$, on note $\tau_t = \lfloor \frac{Nt}{T} \rfloor \frac{T}{N}$ le dernier instant de rebalancement du portefeuille avant t.

9. Vérifier que $d\tilde{V}_t^N = \sigma\varphi(\tau_t, S_{\tau_t})\tilde{S}_t dW_t$.
10. En déduire que $\mathbb{E}^*\left[(f(S_T) - V_T^N)^2\right] = \sigma^2 e^{2rT} \int_0^T \mathbb{E}^*\left[\tilde{S}_t^2(\varphi(t,S_t) - \varphi(\tau_t, S_{\tau_t}))^2\right] dt$.
11. Vérifier que $\frac{1}{\sigma}(\varphi(t,S_t) - \varphi(\tau_t, S_{\tau_t})) = \int_{\tau_t}^t \partial_x\varphi(u,S_u)S_u(dW_u - \sigma du)$ et en déduire que

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{S}_t}{\sigma}(\varphi(t,S_t) - \varphi(\tau_t, S_{\tau_t})) &= \tilde{S}_{\tau_t}\partial_x\varphi(\tau_t, S_{\tau_t})S_{\tau_t}(W_t - W_{\tau_t}) \\ &+ \tilde{S}_{\tau_t}\int_{\tau_t}^t (\partial_x\varphi(u,S_u)S_u - \partial_x\varphi(\tau_t, S_{\tau_t})S_{\tau_t})dW_u \\ &+ (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{\tau_t})\int_{\tau_t}^t \partial_x\varphi(u,S_u)S_u dW_u - \sigma\tilde{S}_t\int_{\tau_t}^t \partial_x\varphi(u,S_u)S_u du.\end{aligned}$$

On admet que pour N grand, ce qui entraîne que $t - \tau_t \leq \frac{T}{N}$ est petit, le terme dominant de cette décomposition est $\tilde{S}_{\tau_t}\partial_x\varphi(\tau_t, S_{\tau_t})S_{\tau_t}(W_t - W_{\tau_t})$ qui est d'ordre $\sqrt{t - \tau_t}$ et que l'on peut négliger les trois autres qui sont d'ordre $t - \tau_t$.

12. Soit $k \in \{0, \ldots, N-1\}$. Vérifier que pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$\mathbb{E}^*\left[\tilde{S}_{\tau_t}^2(\partial_x\varphi(\tau_t, S_{\tau_t}))^2 S_{\tau_t}^2(W_t - W_{\tau_t})^2\right] = e^{-2rt_k}\mathbb{E}^*\left[S_{t_k}^4(\partial_x\varphi(t_k, S_{t_k}))^2\right](t - t_k).$$

Calculer $\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t - t_k)dt$ et conclure que pour $N \to \infty$,

$$\mathbb{E}^*\left[(f(S_T) - V_T^N)^2\right] \sim \frac{\sigma^4 e^{2rT} T}{2N}\int_0^T e^{-2rt}\mathbb{E}^*\left[S_t^4(\partial_x\varphi(t,S_t))^2\right] dt.$$

Exercice

Soit $(H_t)_{t\in[0,T]}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté tel que $\mathbb{P}(\forall t \in [0,T],\ |H_t| \leq 1) = 1$. L'objectif de cet exercice est de montrer que pour une fonction convexe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(B_T)$ est intégrable, alors

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^T H_t dB_t\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^T dB_t\right)\right]. \tag{1}$$

L'intuition financière derrière ce résultat est qu'augmenter la volatilité augmente le prix d'une option de payoff convexe. Soit $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien indépendant de $(B_t)_{t\in[0,T]}$. Pour $t \in [0,T]$, on pose $X_t = \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t \sqrt{1 - H_s^2}dW_s$.

1. Justifer que la loi conditionnelle de $\int_0^T \sqrt{1 - H_t^2}dW_t$ sachant $\mathcal{F}_T$ est $\mathcal{N}_1(0, T - \int_0^T H_t^2 dt)$.
2. En déduire que $\mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_T] = \int_0^T H_t dB_t$ puis que $\mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^T H_t dB_t\right)\right] \leq \mathbb{E}[\varphi(X_T)]$.
3. Pour $u \in \mathbb{R}$, calculer de^{iuX_t} à l'aide de la proposition 3.4.18 du livre (on pourra si besoin décomposer en partie réelle et partie imaginaire).
4. En déduire que $\forall t \in [0,T]$, $\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = 1 - \int_0^t \frac{u^2}{2}\mathbb{E}[e^{iuX_s}]ds$. Quelle est la loi de X_t ? Conclure que (1) est vraie.

Questions subsidiaires

L'objectif est de montrer que l'inégalité (1) n'est pas nécessairement satisfaite si $\varphi(x) = \psi(|x|)$ où ψ est croissante.

Soit $a > 0$, $\varphi(x) = 1_{\{|x| \geq a\}}$, $\tau = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a\}$ et $(H_t = 1_{\{t \leq \tau\}})_{t \in [0,T]}$. Soit enfin $f(t, x) = \mathbb{P}(|x + B_t| \geq a)$ pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

5. La fonction φ est-elle convexe ?
6. Vérifier que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. Que vaut $|B_\tau|$?
7. Vérifier que $\mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^T H_t dB_t\right)\right] = \mathbb{P}(\tau < T) + \mathbb{E}\left[1_{\{\tau \geq T\}}\varphi(B_T)\right]$.
8. Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, vérifier que $f(t, x) = f(t, -x)$ et que $f(t, x) < 1$.
9. En admettant que $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de (τ, B_τ), vérifier que $\mathbb{E}\left[\varphi(B_T)1_{\{\tau < T, B_\tau = a\}}\right] = \mathbb{E}[f(T - \tau, a)1_{\{\tau < T, B_\tau = a\}}]$ puis que $\mathbb{E}\left[\varphi(B_T)1_{\{\tau < T\}}\right] = \mathbb{E}[f(T - \tau, a)1_{\{\tau < T\}}]$.
10. Justifier que $\mathbb{P}(\tau < T) \geq 2N(-\frac{a}{\sqrt{T}})$ où $N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} > 0$ et conclure que $\mathbb{E}\left[\varphi(B_T)\right] < \mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^T H_t dB_t\right)\right]$.