Méthodes mathématiques pour la finance

Examen du 31 mai 2017 (8h30-11h00)
Notes de cours et documents autorisés

On se donne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$.

Modèles de Black-Scholes authentique puis falsifié

On se place dans le cadre du modèle de Black&Scholes sur l'intervalle de temps $[0, T]$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t (avec $r > 0$) et un actif risqué de prix S_t à l'instant t. L'évolution du processus $(S_t)_{t\in[0,T]}$ est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt, \ S_0 = s_0$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité et $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement de l'actif. On notera $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ une fonction de payoff vérifiant $\exists C < \infty, \ \forall x > 0, \ f(x) \leq C(1 + x)$.

1. Donner sans preuve sous forme d'espérance conditionnelle le prix à l'instant $t \in [0, T]$ de l'option européenne qui rapporte $f(S_T)$ à l'échéance T.
2. Montrer que ce prix se met sous la forme $F_\sigma(t, S_t)$ avec $F_\sigma(t, x)$ une fonction que l'on précisera sous forme d'espérance portant sur $W_T - W_t$.
3. On suppose que $x \mapsto f(x)$ est convexe et on se donne $t \in [0, T[$ et $\bar{\sigma} \in]\sigma, +\infty[$.
   (a) Montrer que $x \mapsto F_\sigma(t, x)$ est convexe.
   (b) Quelle est la loi de $\sigma\sqrt{T-t} \times G_1 + \sqrt{(\bar{\sigma}^2 - \sigma^2)(T-t)} \times G_2$ où $(G_1, G_2) \sim \mathcal{N}_2(0, I_2)$ sous la probabilité $\mathbb{P}$?
   (c) En déduire que
   $$F_{\bar{\sigma}}(t, x) = \mathbb{E}\left(e^{-r(T-t)} f\left(xe^{\sigma\sqrt{T-t}\times G_1 + (r-\sigma^2/2)(T-t)} e^{\sqrt{(\bar{\sigma}^2-\sigma^2)(T-t)}\times G_2 - (\bar{\sigma}^2-\sigma^2)(T-t)/2}\right)\right),$$
   puis que
   $$F_{\bar{\sigma}}(t, x) = \mathbb{E}\left(F_\sigma\left(t, xe^{\sqrt{(\bar{\sigma}^2-\sigma^2)(T-t)}\times G_2 - (\bar{\sigma}^2-\sigma^2)(T-t)/2}\right)\right).$$
   (d) Conclure que $F_{\bar{\sigma}}(t, x) \geq F_\sigma(t, x)$ i.e. que la fonction de prix est croissante en la volatilité.
4. Quel rôle joue la quantité $\partial_x F_\sigma(t, S_t)$ pour le vendeur de l'option ?
5. Rappeler sans la démontrer l'équation aux dérivées partielles avec condition terminale vérifiée par la fonction $F_\sigma(t, x)$ pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^*$?

On s'intéresse maintenant à un actif risqué avec une dynamique plus générale

$$d\hat{S}_t = \sigma_t \hat{S}_t dW_t + r\hat{S}_t dt, \ \hat{S}_0 = s_0$$

où $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et borné.

6. Calculer $d(e^{-rt}F_\sigma(t,\hat{S}_t))$.

Soit $\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$ la valeur actualisée en $t \in [0,T]$ du portefeuille autofinancé de valeur initiale $F_\sigma(0,s_0)$ et qui consiste à détenir la quantité $\partial_x F_\sigma(t,\hat{S}_t)$ d'actif risqué en t.

7. Vérifier à l'aide de la question 5 que

$$d(\tilde{V}_t - e^{-rt}F_\sigma(t,\hat{S}_t)) = \frac{e^{-rt}}{2}(\sigma^2-\sigma_t^2)\hat{S}_t^2\partial_{xx}F_\sigma(t,\hat{S}_t)dt$$

et en déduire que

$$F_\sigma(0,s_0) - \mathbb{E}^*\left(e^{-rT}f(\hat{S}_T)\right) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{-rt}\mathbb{E}^*\left((\sigma^2-\sigma_t^2)\hat{S}_t^2\partial_{xx}F_\sigma(t,\hat{S}_t)\right)dt.$$

8. Lorsque f est convexe et $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ est à valeurs dans $[-\sigma,\sigma]$, vérifier que $V_T \geq f(\hat{S}_T)$. Interpréter ce résultat pour le vendeur de l'option.

On suppose désormais

$$\forall t \in [0,T],\ \mathbb{P}^* \text{ p.s. },\ \mathbb{E}^*\left(\sigma_t^2|\hat{S}_t\right) = \sigma^2. \tag{1}$$

9. Vérifier que $F_\sigma(0,s_0) = \mathbb{E}^*\left(e^{-rT}f(\hat{S}_T)\right)$ et $\mathbb{E}^*\left(V_T - f(\hat{S}_T)\right) = 0$. Cela signifie-t-il que le portefeuille autofinancé considéré permet de couvrir l'option de payoff $f(\hat{S}_T)$?

10. Vérifier dans le cas d'un Put de strike $K>0$, $\forall x>0$, $f(x) = \int_0^K 1_{\{x\leq y\}}dy$ et en déduire que

$$\int_0^K \mathbb{P}^*(\hat{S}_T \leq y)dy = \int_0^K \mathbb{P}^*\left(S_T \leq y\right)dy.$$

11. Conclure que sous $\mathbb{P}^*$, $\hat{S}_T$ a même loi que $s_0e^{\sigma W_T+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}$.

En fait pour tout $t\in[0,T]$, $\hat{S}_t$ a même loi que $s_0e^{\sigma W_t+(r-\frac{\sigma^2}{2})t}$ si bien que l'on parle de modèle de Black-Scholes falsifié lorsque le processus $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ n'est pas constant et égal à σ. Dans la suite, nous allons montrer l'existence d'un mouvement brownien falsifié $(Y_t)_{t\geq 0}$ avec lequel on pourrait effectivement construire un modèle de Black-Scholes falsifié. Sous $\mathbb{P}$, on se donne un couple $(G_1,G_2) \sim \mathcal{N}_2(0,I_2)$ $\mathcal{F}_0$-mesurable et donc indépendant de $(B_t)_{t\geq 0}$ et on pose pour $t>0$, $X_t = 1_{\{t\geq 1\}}\int_1^t \frac{dB_s}{\sqrt{s}} - 1_{\{t<1\}}\int_t^1 \frac{dB_s}{\sqrt{s}}$ et

$$Y_0 = 0 \text{ et } Y_t = \sqrt{t}\left(G_1\cos(X_t)+G_2\sin(X_t)\right) \text{ pour } t>0.$$

12. Justifier que $t\mapsto Y_t$ est continue en 0.

13. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. En remarquant que la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$ est orthogonale, justifier que $(G_1\cos(\theta)+G_2\sin(\theta), G_2\cos(\theta)-G_1\sin(\theta)) \sim \mathcal{N}_2(0,I_2)$.

14. En déduire que pour $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mesurable bornée,

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(G_1\cos(X_t)+G_2\sin(X_t), G_2\cos(X_t)-G_1\sin(X_t)\right)|X_t\right) = \mathbb{E}\left(\varphi(G_1,G_2)\right)$$

puis que $(G_1\cos(X_t)+G_2\sin(X_t), G_2\cos(X_t)-G_1\sin(X_t)) \sim \mathcal{N}_2(0,I_2)$.
Quelle est la loi de Y_t ?

15. Pour $t\geq 1$, calculer $d\cos(X_t)$ et $d\sin(X_t)$ et en déduire que

$$dY_t = \left(G_2\cos(X_t)-G_1\sin(X_t)\right)dB_t$$

formule qui reste valable pour $t\in[0,1]$.

16. Vérifier que $\mathbb{E}\left(\left(G_2\cos(X_t)-G_1\sin(X_t)\right)^2|Y_t\right) = 1$, propriété analogue de (1).