Méthodes mathématiques pour la finance

Examen du 30 mai 2018 (8h30-11h00)

On se donne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On se place dans le cadre du modèle de Black&Scholes sur l'intervalle de temps $[0,T]$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S^0_t = e^{rt}$ à l'instant t (avec $r>0$) et un actif risqué de prix S_t à l'instant t. L'évolution du processus $(S_t)_{t\in[0,T]}$ est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt,\ S_0 = s_0$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité, $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement et $s_0 > 0$ le cours initial de l'actif. On notera $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

Options barrière et lookback

Pour $t \in [0,T]$, on note $M_t = \max_{u\in[0,t]} S_u$ le maximum du cours de l'actif risqué sur l'intervalle $[0,t]$. On considère une option européenne de fonction de payoff $\varphi(S_T, M_T)$ où $\varphi :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}_+$ est telle que $\mathbb{E}^*[(\varphi(S_T, M_T))^2] < \infty$.

1. Quelle résultat assure que l'option est réplicable ? Donner son prix V_t en $t\in[0,T]$ sous forme d'espérance conditionnelle. Pourquoi seules les valeurs de φ sur $\{(x,y) \in]0,+\infty[^2 : x \leq y\}$ comptent-elles ?
2. Montrer que $M_T = \max(M_t, S_t \exp\{\max_{u\in[t,T]}[\sigma(W_u - W_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(u-t)]\})$. En déduire que $V_t = v(t, S_t, M_t)$ pour une fonction $v(t,x,y)$ que l'on écrira sous forme d'espérance. En déduire également que pour $z > 0$,

$$1_{\{M_T < z\}} = 1_{\{M_t < z\}} 1_{\{S_t \exp(\max_{u\in[t,T]}[\sigma(W_u - W_t) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(u-t)]) < z\}}.$$

L'objectif de la suite de ce problème est d'établir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction v. Pour cela, nous allons commencer par traiter le cas particulier d'une option barrière $\varphi(x,y) = \phi(x) 1_{\{y<z\}}$. On note $\tau_z = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq z\}$ (convention $\inf \emptyset = +\infty$) le temps d'atteinte de la barrière par l'actif risqué.

3. Montrer que dans ce cas $v(t,x,y) = 1_{\{y<z\}} w(t,x)$ pour

$$w(t,x) = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}\phi(xe^{\sigma(W_T - W_t) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}) 1_{\{x \exp(\max_{u\in[t,T]}[\sigma(W_u - W_t) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(u-t)]) < z\}}\right].$$

   Que vaut $w(t,x)$ pour $x \geq z$?
4. On suppose $s_0 < z$. Que vaut S_{τ_z} si $\tau_z < +\infty$? Montrer que $\{M_t < z\} = \{\tau_z > t\}$. Conclure que $\forall t \in [0,T],\ e^{-rt} 1_{\{M_t<z\}} w(t, S_t) = e^{-r(t\wedge\tau_z)} w(t\wedge\tau_z, S_{t\wedge\tau_z})$. Vérifier que cette égalité reste vraie si $s_0 \geq z$.

On admet que la fonction w est régulière et on note $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ et $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$.

5. Calculer $dw(t, S_t)$ puis $d(e^{-rt} w(t, S_t))$. En déduire que

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,T],\ \tilde{V}_t =& \tilde{V}_0 + \int_0^t 1_{\{s\leq\tau_z\}} \partial_x w(s, S_s) \sigma \tilde{S}_s dW_s \\ &+ \int_0^t 1_{\{s\leq\tau_z\}} e^{-rs}\left(\partial_t w + \frac{\sigma^2 S_s^2}{2}\partial_{xx} w + rS_s \partial_x w - rw\right)(s, S_s) ds.\end{aligned}$$

6. En déduire que w est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx} w(t,x) + rx\partial_x w(t,x) - rw(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,T]\times]0,z], \\ w(t,z) = 0, \ t \in [0,T] \text{ et } w(T,x) = \phi(x), \ x \in]0,z[. \end{cases}$$

Donner en fonction de w et de τ_z la composition du portefeuille de couverture de l'option à l'instant t.

On s'intéresse désormais à un payoff φ qui s'écrit

$$\forall 0 < x \leq y, \ \varphi(x,y) = \psi(x) + \int_0^{+\infty} 1_{\{y<z\}} \phi(x,z) dz. \tag{1}$$

7. Si pour tout $x > 0$, $\varphi(x,y)$ admet une limite égale à $\psi(x)$ lorsque $y \to \infty$ et $\int_x^{+\infty} |\partial_z \varphi(x,z)| dz < \infty$, vérifier que (1) est satisfaite pour ϕ à préciser.
8. Montrer que la fonction de pricing admet la décomposition $v(t,x,y) = u(t,x) + \int_y^{\infty} w(t,x,z)dz$ où on précisera u et w. Que vaut $\partial_y v$?
9. Conclure que v est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x,y) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx} v(t,x,y) + rx\partial_x v(t,x,y) - rv(t,x,y) = 0, \ t \in [0,T], \ 0 < x \leq y, \\ \partial_y v(t,y,y) = 0, \ t \in [0,T] \text{ et } v(T,x,y) = \varphi(x,y), \ 0 < x \leq y. \end{cases}$$

10. Le processus $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus croissant continu qui ne croît que lorsque $S_t = M_t$ mais ce n'est pas un processus d'Itô (on ne peut pas écrire $dM_t = m_t dt$). On admet néanmoins que $dM_t = 1_{\{S_t = M_t\}} dM_t$ et que pour f régulière

$$df(t,S_t,M_t) = \partial_t f(t,S_t,M_t)dt + \partial_x f(t,S_t,M_t)dS_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,S_t,M_t)d < S >_t + \partial_y f(t,S_t,M_t)dM_t.$$

Quelle est la composition du portefeuille de couverture de l'option à l'instant t ?

Vega d'une option européenne

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ une fonction de payoff C^1 à dérivée bornée. On note $v(\sigma)$ la prime à l'instant initial de cette option pour la volatilité σ.

1. Exprimer v sous forme d'une espérance sous $\mathbb{P}^*$.
2. Montrer que $v'(\sigma) = s_0 \tilde{\mathbb{E}}\left(\beta_T \varphi'(s_0 e^{\sigma\beta_T + (r+\frac{\sigma^2}{2})T})\right)$ où $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}$ et $\beta_t = W_t - \sigma t$. Que peut-on dire de $(\beta_t)_{t\in[0,T]}$ sous $\tilde{\mathbb{P}}$?
3. Soient f et g deux fonctions qui ont la même monotonie (soit toutes deux décroissantes soit toutes deux croissantes) telles que $f(\beta_T), g(\beta_T)$ et $f(\beta_T)g(\beta_T)$ sont intégrables sous $\tilde{\mathbb{P}}$ et G une variable aléatoire indépendante de β_T et distribuée suivant $\mathcal{N}_1(0,T)$ sous $\tilde{\mathbb{P}}$. Que peut-on dire de $(f(\beta_T) - f(G))(g(\beta_T) - g(G))$?
En déduire que $\tilde{\mathbb{E}}(f(\beta_T)g(\beta_T)) \geq \tilde{\mathbb{E}}(f(\beta_T))\tilde{\mathbb{E}}(g(\beta_T))$.
4. En déduire que si φ est convexe, la fonction v est croissante avec la volatilité σ. Que se passe-t-il si φ est concave ?
5. Dans le cas d'un Call de prix d'exercice K, vérifier que $v'(\sigma) = s_0 \int_{-d_1\sqrt{T}}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2T}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi T}}$ avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln(s_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T)$ puis que $v'(\sigma) = s_0\sqrt{T} n(d_1)$ où $n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.