Méthodes mathématiques pour la finance

Examen du 29 mai 2019 (8h30-11h00)

On se donne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On se place dans le cadre du modèle de Black&Scholes sur l'intervalle de temps $[0,T]$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t (avec $r>0$) et un actif risqué de prix S_t à l'instant t dont l'évolution est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt,\ S_0 = s_0$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité, $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement et $s_0 > 0$ le cours initial de l'actif. On notera $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

Limite $\sigma \to +\infty$ du prix du Call

On note $c(\sigma)$ la prime à l'instant initial du Call européen de maturité T et de prix d'exercice K pour la volatilité σ.

1. Exprimer c sous forme d'une espérance sous $\mathbb{P}^*$.
2. Que vaut $\mathbb{E}^*[e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}]$?
3. Quel est le comportement asymptotique presque sûr de $e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}$ lorsque $\sigma \to \infty$?
4. En déduire que $\mathbb{E}^*[\sup_{\sigma>0} e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}] = +\infty$.
   Calculer $\sup_{\sigma>0} e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}$ et retrouver ce résultat.
5. Quel est le comportement asymptotique presque sûr de $(s_0 e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} - Ke^{-rT})^+$ lorsque $\sigma \to \infty$?
6. Montrer que
$$c(\sigma) = s_0 - \mathbb{E}^*\left[s_0 e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} 1_{\{s_0 e^{\sigma W_T + (r-\frac{\sigma^2}{2})T} \leq K\}}\right] - Ke^{-rT}\mathbb{P}^*(s_0 e^{\sigma W_T + (r-\frac{\sigma^2}{2})T} > K).$$
7. Montrer que $\lim_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}^*\left[s_0 e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T} 1_{\{S_0 e^{\sigma W_T + (r-\frac{\sigma^2}{2})T} \leq K\}}\right] = 0$. Quel est le comportement asymptotique de $\mathbb{P}^*(s_0 e^{\sigma W_T + (r-\frac{\sigma^2}{2})T} > K)$ lorsque $\sigma \to \infty$? En déduire $\lim_{\sigma\to+\infty} c(\sigma)$.

Option passeport

Une option passeport donne le droit à son acheteur de choisir un processus $\Delta = (\Delta_t)_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans $[-1,1]$ et toucher à maturité T la partie positive $(X_T^\Delta)^+$ de la valeur en T du portefeuille autofinancé de valeur initiale x_0 et qui consiste à détenir Δ_t actif risqué en $t \in [0,T]$. On note X_t^Δ la valeur de ce portefeuille en $t \in [0,T]$ et on pose $w(\Delta) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(X_T^\Delta)^+]$.

1. Exprimer en fonction de S_t^0, X_t^Δ, Δ_t et S_t la quantité d'actif sans risque détenue en t dans ce portefeuille ?

On pose $Y_t^\Delta = X_t^\Delta / S_t$.

2. En appliquant un résultat vu en TD, dont on rappellera le nom, vérifier que l'autofinancement s'écrit $dY_t^\Delta = (X_t^\Delta - \Delta_t S_t)e^{-rt}dU_t$ où $U_t = S_t^0/S_t$.
3. Calculer U_t et en déduire que $dY_t^\Delta = \sigma(\Delta_t - Y_t^\Delta)(dW_t - \sigma dt)$.
4. Pourquoi peut-on définir une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ de densité $\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = \frac{e^{-rT}S_T}{s_0}$ par rapport à $\mathbb{P}^*$? Que peut-on dire du processus $(\beta_t = W_t - \sigma t)_{t\in[0,T]}$ sous cette probabilité $\hat{\mathbb{P}}$?

On note désormais $\hat{\mathbb{E}}$ l'espérance sous la probabilité $\hat{\mathbb{P}}$.

5. Pourquoi l'équation différentielle stochastique
$$dZ_t = \sigma(1 + |Z_t|)d\beta_t,\ Z_0 = z_0$$
admet-elle une unique solution pour toute condition initiale $z_0 \in \mathbb{R}$?
6. Justifier que $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable sous $\hat{\mathbb{P}}$ et en déduire que pour $s \in [0, T]$, $Z_s^+ \leq \hat{\mathbb{E}}[Z_T^+|\mathcal{F}_s]$.

On admet l'existence d'une solution $v(t, z)$ continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ et $C^{1,2}$ avec $\partial_z v$ bornée sur $[0, T[\times\mathbb{R}$ à l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t v(t,z) + \frac{\sigma^2}{2}(1 + |z|)^2\partial_{zz}v(t, z) = 0,\ (t, z) \in [0, T[\times\mathbb{R}, \\ v(T, z) = z^+,\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

7. Soit $s \in [0, T[$. Calculer $dv(t + s, Z_t)$ pour $t \in [0, T - s[$.
En déduire que $(v(t + s, Z_t))_{t\in[0,T-r]}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$.
8. Soient $t, s \geq 0$ tels que $t + s \leq T$. Montrer que $v(t+s, Z_t) = \hat{\mathbb{E}}[Z_{T-s}^+|\mathcal{F}_t]$ et $v(t, Z_t) = \hat{\mathbb{E}}[Z_T^+|\mathcal{F}_t]$ et en déduire que $v(t, Z_t) \geq v(t + s, Z_t)$.
9. Quel est le signe de $\partial_t v$ sur $[0, T[\times\mathbb{R}$? En déduire que pour tout $t \in [0, T[$, $z \mapsto v(t, z)$ est convexe.
10. On pose $V_t^\Delta = v(t, Y_t^\Delta)$. Vérifier que pour $t \in [0, T[$,
$$dV_t^\Delta = \sigma\partial_z v(t, Y_t^\Delta)(\Delta_t - Y_t^\Delta)d\beta_t + D_t dt,$$
où $D_t = \frac{\sigma^2}{2}\partial_{zz}v(t, Y_t^\Delta)[(\Delta_t - Y_t^\Delta)^2 - (1 + |Y_t^\Delta|)^2]$. Quel est le signe de D_t pour $t \in [0, T[$?
11. En déduire que $v(0, Y_0^\Delta) + \sigma\int_0^T 1_{\{t\leq\tau_n\}}\partial_z v(t, Y_t^\Delta)(\Delta_t - Y_t^\Delta)d\beta_t \geq (Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)^+$ où $\tau_n = \inf\{t \in [0, T] : |Y_t^\Delta| \geq n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\liminf_{n\to\infty} \hat{\mathbb{E}}\left[(Y_{T\wedge\tau_n}^\Delta)^+\right] \geq \frac{w(\Delta)}{s_0}$ et conclure que $s_0 v(0, \frac{x_0}{s_0}) \geq \sup_\Delta w(\Delta)$. Quel choix de processus $\Delta = (\Delta_t)_{t\in[0,T]}$ $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans $[-1, 1]$ semble atteindre cette borne supérieure ? Quelle équation faut-il savoir résoudre pour justifier ce choix ?
12. On note $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$. Donner $d\tilde{S}_t$ en fonction de dW_t, calculer $d(\tilde{S}_t V_t^\Delta)$ et en déduire que
$$e^{-rT}(X_T^\Delta)^+ \leq s_0 v\left(0, \frac{x_0}{s_0}\right) + \int_0^T (V_t^\Delta + \partial_z v(t, Y_t^\Delta)(\Delta_t - Y_t^\Delta))\sigma\tilde{S}_t dW_t.$$
13. Quelle est l'évolution de la valeur actualisée $\tilde{V}_t$ d'un portefeuille autofinancé qui consiste à détenir $v(t, Y_t^\Delta) + \partial_z v(t, Y_t^\Delta)(\Delta_t - Y_t^\Delta)$ actif risqué en t ? Conclure qu'en gérant celui de valeur initiale $s_0 v(0, \frac{x_0}{s_0})$, le vendeur de l'option (qui observe le processus Δ) surcouvre l'option passeport.