Méthodes mathématiques pour la finance

Examen du 2 juin 2021 (8h30-11h00)

On se donne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On se place dans le cadre du modèle de Black&Scholes sur l'intervalle de temps $[0, T]$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t (avec $r \geq 0$) et un actif risqué de prix S_t à l'instant t dont l'évolution est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt, \ S_0 = s_0$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité, $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement et $s_0 > 0$ le cours initial de l'actif. On notera $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

Autofinancement des montants investis dans les deux actifs

On considère une option européenne vanille d'échéance T et de payoff $f(S_T)$ où $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ est une fonction régulière.

1. Exprimer le prix V_t de l'option à l'instant $t \in [0, T]$ sous forme d'une espérance conditionnelle sous $\mathbb{P}^*$.
2. Montrer que $V_t = v(t, S_t)$ pour une fonction $v(t, x)$ que l'on précisera sous forme d'espérance portant sur $(W_T - W_t)$.
3. Rappeler (sans démonstration) l'équation aux dérivées partielles satisfaites par la fonction v. Quelle est la quantité d'actif risqué à détenir en $t \in [0, T]$ dans le portefeuille de couverture ? En déduire le montant U_t investi en t dans cet actif et le montant investi dans l'actif sans risque.
4. Vérifier que $u(t, x) = x\partial_x v(t, x)$ est solution de

$$\partial_t u(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx} u(t, x) + rx\partial_x u(t, x) - ru(t, x) = 0, \ (t, x) \in [0, T]\times]0, +\infty[.$$

   Quel nom cette équation aux dérivées partielles porte-t-elle ?
5. Calculer $du(t, S_t)$ puis $d(e^{-rt}u(t, S_t))$. En déduire que U_t est la valeur en t d'un portefeuille autofinancé puis que le montant investi en actif sans risque est également autofinancé.
6. On pose maintenant $u_n(t, x) = x^n \partial_x^n v(t, x)$ si bien que $u_0 = v$ et $u_1 = u$. Exprimer $x\partial_x u_n(t, x)$ en fonction de u_{n+1} et u_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est solution de l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes.

Portefeuille autofinancé optimal pour le critère moyenne-variance

On se donne une richesse initiale $x_0 > 0$ déterministe que l'on va investir de manière autofinancée dans les deux actifs, en notant θ_t le montant investi en actif risqué en t, que l'on suppose dans l'espace $\mathcal{H}$ des processus $\mathcal{F}_t$-adaptés et tels que $\mathbb{E}[\int_0^T \theta_t^2 dt] < \infty$. On note X_t^θ la valeur du portefeuille en t. Pour $\delta \geq 0$, l'objectif est de trouver le choix de $\theta = (\theta_t)_{t\in[0,T]}$ qui minimise

$$J_\delta(\theta) := \frac{1}{2}\mathrm{Var}(X_T^\theta) - \delta\mathbb{E}[X_T^\theta].$$

Pour $\delta > 0$ cela revient à maximiser l'espérance de la valeur terminale du portefeuille moins une pénalisation proportionnelle à sa variance qui mesure la variabilité et donc le risque induit par le caractère aléatoire de cette valeur terminale.

1. Vérifier que $dX_t^\theta = rX_t^\theta dt + \theta_t(\sigma dB_t + (\mu - r)dt)$.
2. On pose $\tilde{X}_t^\theta = e^{-rt}X_t^\theta$ et $\tilde{\theta}_t = e^{-rt}\theta_t$. Exprimer $d\tilde{X}_t^\theta$ en fonction de $\tilde{\theta}_t$ et de dB_t et en déduire que
$$\forall t \in [0,T],\ (\tilde{X}_t^\theta)^2 \leq 3\left(x_0^2 + \sigma^2\left(\int_0^t \tilde{\theta}_s dB_s\right)^2 + (\mu - r)^2 t\int_0^t \tilde{\theta}_s^2 ds\right),$$
puis que
$$\forall t \in [0,T],\ (X_t^\theta)^2 \leq 3e^{2rT}\left(x_0^2 + \sigma^2 \sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \tilde{\theta}_s dB_s\right)^2 + (\mu - r)^2 T\int_0^T \tilde{\theta}_s^2 ds\right),$$
Conclure que $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]}(X_t^\theta)^2] < \infty$ si bien que $\mathrm{Var}(X_T^\theta)$ est bien définie.
3. Lorsque $\delta = 0$, trouver une stratégie, c'est-à-dire un choix du processus θ qui minimise $J_0(\theta)$. Lorsque $\mu = r$, calculer $\mathbb{E}[e^{-rT}X_T^\theta]$ et en déduire que la stratégie précédente continue à minimiser $J_\delta(\theta)$ pour $\delta > 0$.
4. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$, $\inf_{\alpha\in\mathbb{R}}\{\frac{\alpha^2}{2} - \alpha x\} = -\frac{x^2}{2}$ et en déduire que
$$\inf_{\theta\in\mathcal{H}} J_\delta(\theta) = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{2}(\alpha - \delta)^2 + U_\alpha\right\} \text{ où } U_\alpha = \inf_{\theta\in\mathcal{H}}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(X_T^\theta)^2 - \alpha X_T^\theta\right].$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $v(t,x) = e^{\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2(t-T)}\left(e^{2r(T-t)}\frac{x^2}{2} - e^{r(T-t)}\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{\alpha^2}{2}$ et on admet momentanément que v est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(1)\begin{cases}\partial_t v(t,x) + rx\partial_x v(t,x) + \inf_{a\in\mathbb{R}}\left\{\dfrac{a^2\sigma^2}{2}\partial_{xx}v(t,x) - a(r-\mu)\partial_x v(t,x)\right\} = 0, (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}\\ v(T,x) = \frac{x^2}{2} - \alpha x,\ x \in \mathbb{R}.\end{cases}$$

5. Expliciter la valeur $\hat{\theta}(t,x)$ de a qui réalise l'infimum au point (t,x) dans cette équation. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$, $\sup_{t\in[0,T]}|\partial_x v(t,x)| \leq e^{2rT}|x| + e^{rT}|\alpha|$ et
$$\sup_{t\in[0,T]}|v(t,x)| \leq e^{2rT}\frac{x^2}{2} + e^{rT}|\alpha x| + \frac{\alpha^2}{2} \leq e^{2rT}x^2 + \alpha^2.$$
6. Calculer $dv(t,X_t^\theta)$ et en déduire que $dv(t,X_t^\theta) \geq \sigma\theta_t\partial_x v(t,X_t^\theta)dB_t$. Si on pose $\tau_n = \inf\{t \in [0,T] : |X_t^\theta| \geq n\}$ (convention $\inf\emptyset = T$), vérifier que $\mathbb{E}[v(T\wedge\tau_n, X_{T\wedge\tau_n}^\theta)] \geq v(0,x_0)$. Conclure que $U_\alpha \geq v(0,x_0)$.
7. Justifier que l'équation différentielle stochastique
$$d\hat{X}_t = r\hat{X}_t dt + \hat{\theta}(t,\hat{X}_t)(\sigma dB_t + (\mu - r)dt),\ \hat{X}_0 = x_0,$$
admet une unique solution.
8. Vérifier que $(\theta_t^\star = \hat{\theta}(t,\hat{X}_t))_{t\in[0,T]}$ est une stratégie dans $\mathcal{H}$, calculer $dv(t,\hat{X}_t)$ et en déduire que $U_\alpha = v(0,x_0)$ avec stratégie optimale $\theta^\star$.
9. Montrer qu'il existe un unique $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}$ tel que $\inf_{\theta\in\mathcal{H}} J_\delta(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{\alpha} - \delta)^2 + U_{\hat{\alpha}}$ et l'expliciter. En déduire une expression explicite pour $\inf_{\theta\in\mathcal{H}} J_\delta(\theta)$
10. Donner une stratégie optimale pour le problème de gestion de portefeuille sous critère moyenne-variance.
11. Vérifier que v est bien solution de l'équation aux dérivées partielles (1).