Méthodes mathématiques pour la finance

Examen du 1er juin 2022 (8h30-11h00)

Option forward start

On se donne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On se place dans le cadre du modèle de Black&Scholes sur l'intervalle de temps $[0,T]$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t (avec $r \geq 0$) et un actif risqué de prix S_t à l'instant t dont l'évolution est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt,\ S_0 = s_0$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité, $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement et $s_0 > 0$ le cours initial de l'actif. On notera $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

On considère une option européenne forward start d'échéance T et de payoff $\varphi(S_T, S_{T_1})$ où $0 < T_1 < T$ et $\varphi :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction régulière telle que $c_\varphi = \sup_{(x,y)\in(0,+\infty)^2} \frac{\varphi(x,y)}{1+|x|+|y|} < \infty$.

1. Vérifier que
$$\forall (x,y) \in (0,+\infty)^2,\ \varphi^2(x,y) \leq 3c_\varphi^2(1 + x^2 + y^2).$$
En déduire que $\mathbb{E}^*[\varphi^2(S_T, S_{T_1})] < \infty$. Quel résultat assure que l'option est réplicable ? Donner sa valeur V_t à l'instant $t \in [0,T]$ sous la forme d'une espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$.
2. On suppose que $t \in [0, T_1]$.
   (a) Vérifier que $\mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-T_1)}\varphi(S_T, S_{T_1})|\mathcal{F}_{T_1}\right] = \psi(S_{T_1})$ pour une fonction $\psi(y)$ que l'on explicitera. En déduire que le prix en t de l'option forward start coincide avec celui de l'option européenne vanille de payoff $\psi(S_{T_1})$ à la maturité T_1.
   (b) Vérifier que $V_t = v(t, S_t)$ pour une fonction $v : [0,T_1]\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ que l'on explicitera.
   (c) Quelle est l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction v sur le domaine $[0,T_1] \times (0,+\infty)$?
   (d) Quelle est la quantité d'actif risqué à détenir en t pour couvrir l'option ? Et la quantité d'actif sans risque ?
3. On suppose maintenant que $t \in [T_1, T]$.
   (a) Vérifier que $V_t = w(t, S_t, S_{T_1})$ où, pour $y > 0$, $[T_1,T]\times]0,+\infty[\ni (t,x) \mapsto w(t,x,y)$ est la fonction telle que le prix en $t \in [T_1, T]$ de l'option européenne vanille de payoff $\varphi(S_T, y)$ à maturité T est $w(t, S_t, y)$.
   (b) Vérifier que $\psi(y) = w(T_1, y, y)$ pour tout $y > 0$.
   (c) Justifier que pour $y > 0$, $d(e^{-rt}w(t, S_t, y)) = \partial_x w(t, S_t, y)\sigma e^{-rt} S_t dW_t$.

   L'indépendance de S_{T_1} et de $(W_s - W_{T_1})_{s\in[T_1,T]}$ sous $\mathbb{P}^*$ assure que
$$\forall t \in [T_1, T],\ \int_{T_1}^t \partial_x w(s, S_s, y)\sigma e^{-rs} S_s dW_s\Big|_{y=S_{T_1}} = \int_{T_1}^t \partial_x w(s, S_s, S_{T_1})\sigma e^{-rs} S_s dW_s.$$

(d) Quelle est la quantité d'actif risqué à détenir en t pour couvrir l'option forward start ?

4. On se place désormais dans le cas particulier du Call forward start de payoff $(S_T - KS_{T_1})^+$ qui correspond au choix $\varphi(x,y) = (x - Ky)^+$.

   (a) Vérifier que $\psi(y) = c(T - T_1, r, \sigma, K) \times y$ où l'on explicitera la fonction c. En déduire la composition du portefeuille de couverture sur $[0, T_1]$ et vérifier qu'elle est constante.

   (b) Vérifier que pour $t \in [T_1, T]$, $V_t = S_t \mathcal{N}(d_t^1) - KS_{T_1} e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_t^2)$ où $\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$ et on explicitera d_t^1 et d_t^2 en fonction de $S_t, KS_{T_1}, r, \sigma, T - t$. Quelle est la quantité d'actif risqué à détenir en $t \in [T_1, T]$ dans le portefeuille de couverture ?

Modèle à volatilité stochastique

Soit $(W_t^1)_{t\geq 0}$ et $(W_t^2)_{t\geq 0}$ deux mouvements browniens indépendants, $\rho \in [-1, 1]$, $x, y, a, b, r \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur tout compact . On pose $\beta_t = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2$ pour $t \geq 0$.

1. Pour $0 \leq s \leq t$, calculer $\mathrm{Cov}(\beta_s, \beta_t)$. Que peut-on dire de $(\beta_t)_{t\geq 0}$?

2. Quel résultat assure que l'équation différentielle stochastique

$$dY_t = \eta dW_t^1 + (a - bY_t)dt, \; Y_0 = y \tag{1}$$

   admet une unique solution ? Justifier que $\mathbb{P}\left(\forall t \in [0, +\infty[, \int_0^t f^2(Y_s)ds < +\infty\right) = 1$ et que $(\int_0^t f(Y_s)d\beta_s)_{t\geq 0}$ est bien définie. Expliciter la solution de (1).

3. On pose $X_t = x \exp\left(\int_0^t f(Y_s)d\beta_s + rt - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(Y_s)ds\right)$. Vérifier que

$$dX_t = f(Y_t)X_t d\beta_t + rX_t dt, \; X_0 = x. \tag{2}$$

4. On pose $\xi_t = \exp\left(-\int_0^t f(Y_s)d\beta_s - rt + \frac{1}{2}\int_0^t f^2(Y_s)ds\right)$. Calculer $d\xi_t$.
   Pour $(X_t)_{t\geq 0}$ solution de (2), calculer $d(X_t\xi_t)$ et en déduire X_t.

5. Que peut on en conclure pour le modèle à volatilité stochastique donné par (1)-(2) ? Le théorème d'Itô s'applique-t-il (on pourra discuter à quelle condition sur f la fonction $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(y)x$ est Lipschitzienne) ?