Méthodes mathématiques pour la finance

Examen du 14 juin 2023 (8h30-11h00)

Propagation de la convexité par une Équation Différentielle Stochastique

Soient $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien, $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1 avec des dérivées η' et b' bornées. On suppose que $\eta\eta'$ est lipschitzienne. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^3 avec des dérivées bornées. Pour $T > 0$, on admet l'existence d'une fonction $v : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution régulière de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + \frac{\eta^2(x)}{2}\partial_{xx} v(t,x) + b(x)\partial_x v(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ v(T,x) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et telle que $\partial_x v$ et $\partial_{xx} v$ sont bornées sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

1. D'après quel résultat l'équation différentielle stochastique

$$X_t^x = x + \int_0^t \eta(X_s^x)dW_s + \int_0^t b(X_s^x)ds, \ t \in [0,T]$$

   où la notation X_t^x permet d'expliciter la dépendance en la condition initiale $x \in \mathbb{R}$, admet-elle une unique solution ? Que peut-on dire de $\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}(X_t^x)^2\right]$?

2. Calculer $dv(t, X_t^x)$. Vérifier que $\mathbb{E}\left[\int_0^T (\eta(X_t^x)\partial_x v(t,X_t^x))^2 dt\right] < \infty$ et en déduire que $v(0, x) = \mathbb{E}[\varphi(X_T^x)]$.
3. Vérifier que $u(t, x) = \partial_x v(t, x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{\eta^2(x)}{2}\partial_{xx} u(t,x) + \widetilde{b}(x)\partial_x u(t,x) + b'(x)u(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ u(T,x) = \varphi'(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   pour une fonction $\widetilde{b}$ que l'on précisera. Montrer que $\widetilde{b}$ est lipschitzienne.

On note $(\widetilde{X}_t^x)_{t\in[0,T]}$ la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\widetilde{X}_t^x = x + \int_0^t \eta(\widetilde{X}_s^x)dW_s + \int_0^t \widetilde{b}(\widetilde{X}_s^x)ds, \ t \in [0,T].$$

4. Calculer $d\left(e^{\int_0^t b'(\widetilde{X}_s^x)ds} u(t, \widetilde{X}_t^x)\right)$ et en déduire que $\partial_x \mathbb{E}[\varphi(X_T^x)] = \mathbb{E}\left[e^{\int_0^T b'(\widetilde{X}_s^x)ds} \varphi'(\widetilde{X}_T^x)\right]$. Que peut-on dire de la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto \partial_x \mathbb{E}[\varphi(X_T^x)]$ lorsque φ est croissante ?

On suppose maintenant que la fonction $\eta\eta'$ est dérivable avec une dérivée bornée et que φ est C^4 avec des dérivées bornées.

5. Préciser le coefficient de dérive $\widehat{b}$ de l'équation différentielle stochastique satisfaite par le processus $(\widehat{X}_t^x)_{t\in[0,T]}$ tel que $\partial_x \mathbb{E}\left[\varphi'(\widetilde{X}_T^x)\right] = \mathbb{E}\left[e^{\int_0^T \widetilde{b}'(\widehat{X}_s^x)ds}\varphi''(\widehat{X}_T^x)\right]$.
6. On suppose que la fonction b est affine : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$, $b(x) = \alpha + \beta x$. Montrer que $\partial_{xx}\mathbb{E}[\varphi(X_T^x)] = e^{\beta T}\mathbb{E}\left[e^{\int_0^T \widetilde{b}'(\widehat{X}_s^x)ds}\varphi''(\widehat{X}_T^x)\right]$ et en déduire que $\mathbb{R} \ni x \mapsto v(0, x)$ est convexe lorsque φ l'est.

Modèle à volatilité locale

On se donne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t (avec $r \geq 0$) et un actif risqué de prix S_t à l'instant t dont l'évolution est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma(t, S_t) S_t dB_t + \mu S_t dt,\ S_0 = s_0 \tag{1}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est le rendement, $s_0 > 0$ le cours initial de l'actif et σ la fonction de volatilité locale vérifie $\inf_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} \sigma(t,x) > 0$ et $\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}} (\sigma(t,x) + |x||\partial_x \sigma(t,x)|) < +\infty$. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$ de densité $e^{\int_0^T \frac{r-\mu}{\sigma(u,S_u)} dB_u - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{r-\mu}{\sigma(u,S_u)}\right)^2 du}$ par rapport à $\mathbb{P}$.

1. Quel résultat assure l'existence d'une unique solution $(S_t)_{t\in[0,T]}$ à l'équation différentielle stochastique (1) ? Vérifier que la solution $(S_t)_{t\in[0,T]}$ est telle que
$$\forall t \in [0,T],\ S_t = s_0 e^{\int_0^t \sigma(u,S_u) dB_u + \mu t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,S_u) du}.$$
2. Que peut-on dire de $\left(W_t = B_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma(u,S_u)} du\right)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{P}^*$?
Vérifier que $\mathbb{E}^*\left[\sup_{t\in[0,T]} S_t^2\right] < +\infty$. En déduire que $(\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$. Quelle propriété cela entraîne-t-il pour le marché ?
3. On considère une option européenne de payoff h $\mathcal{F}_T$-mesurable et tel que $\mathbb{E}^*[h^2] < \infty$. Quel résultat assure que cette option est réplicable ? Exprimer son prix V_t à l'instant $t \in [0,T]$ sous forme d'une espérance conditionnelle.

On suppose désormais que $h = \varphi(S_T)$ où $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est lipschitzienne et on admet l'existence d'une solution régulière avec $\partial_x v$ bornée à l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + \frac{(\sigma(t,x)x)^2}{2} \partial_{xx} v(t,x) + rx\partial_x v(t,x) - rv(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+^* \\ v(T,x) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

.

4. Calculer $d\left(e^{-rt} v(t,S_t)\right)$. En déduire que $\left(e^{-rt} v(t,S_t)\right)_{t\in[0,T]}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$ puis que $V_t = v(t,S_t)$. Quelles sont les quantités d'actif risqué et d'actif sans risque à détenir dans le portefeuille de réplication à l'instant $t \in [0,T]$.
5. Quel résultat assure l'existence d'une fonction de volatilité locale σ qui permet de répliquer les prix de marché des Calls de maturité $t \in [0,T]$ et strike $K \in \mathbb{R}_+^*$?

On suppose finalement que φ est convexe.

6. Donner des exemples courants de telles fonctions de payoff.

On peut alors montrer comme dans l'exercice précedent que pour tout $t \in [0,T]$, $x \mapsto v(t,x)$ est convexe. On suppose enfin que le cours de l'actif risqué évolue en fait suivant

$$dX_t = \theta_t X_t dB_t + \mu X_t dt,\ X_0 = s_0,$$

où $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus positif $\mathcal{F}_t$-adapté tel que $\mathbb{P}\left(\int_0^T \theta_t^2 dt < \infty\right) = 1$.

7. Vérifier que
$$d(e^{-rt} v(t,X_t)) = \partial_x v(t,X_t) d(e^{-rt} X_t) + e^{-rt} \frac{\theta_t^2 - \sigma^2(t,X_t)}{2} X_t^2 \partial_{xx} v(t,X_t) dt.$$
En déduire que si $\mathbb{P}(\forall t \in [0,T],\ \theta_t \leq \sigma(t,X_t)) = 1$, alors le portefeuille autofinancé de valeur initiale $v(0,s_0)$ et qui contient $\partial_x v(t,X_t)$ actif riqué en $t \in [0,T]$ a une valeur terminale qui dépasse $\varphi(X_T)$ i.e. permet de surcouvrir l'option.