Méthodes mathématiques pour la finance

Examen du 12 juin 2024 (8h30-11h00)

On se donne sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Option digitale

On se place dans le cadre du modèle de Black&Scholes sur l'intervalle de temps $[0,T]$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t (avec $r \geq 0$) et un actif risqué de prix S_t à l'instant t dont l'évolution est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt,\ S_0 = s_0$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité, $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement et $s_0 > 0$ le cours initial de l'actif. On notera $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.

On considère une option européenne vanille d'échéance T et de payoff $f(S_T)$ où $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}_+$ est une fonction régulière.

1. Exprimer le prix V_t de l'option à l'instant $t \in [0,T]$ sous forme d'une espérance conditionnelle sous $\mathbb{P}^*$.
2. Montrer que $V_t = v(t, S_t)$ pour une fonction $v(t,x)$ que l'on précisera.
3. Rappeler (sans démonstration) l'équation aux dérivées partielles satisfaites par la fonction v. Quelle est la quantité d'actif risqué à détenir en $t \in [0,T]$ dans le portefeuille de couverture ? En déduire le montant U_t investi en t dans cet actif et le montant investi dans l'actif sans risque.
4. Vérifier que $u(t,x) = x\partial_x v(t,x)$ est solution de
$$\partial_t u(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx}u(t,x) + rx\partial_x u(t,x) - ru(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T]\times]0,+\infty[.$$
Quel nom cette équation aux dérivées partielles porte-t-elle ?
5. On pose $w(t,x) = \frac{1}{K}\left(x\partial_x v(t,x) - v(t,x)\right)$ où K est une constante strictement positive. Calculer $d(e^{-rt}w(t,S_t))$ et en déduire que $(e^{-rt}w(t,S_t))_{t\in[0,T]}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$ lorsque la fonction $\partial_x w$ est bornée sur $[0,T]\times]0,+\infty[$.

On se place maintenant dans le cas particulier du Call de strike K où $f(x) = (x-K)^+$ où l'on admet que $(e^{-rt}w(t,S_t))_{t\in[0,T]}$ reste une martingale sous $\mathbb{P}^*$.

6. Donner $v(t,x)$ et $u(t,x)$ et vérifier que $w(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2(t,x))$ où $\mathcal{N}(y) = \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi}}$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et $d_2(t,x)$ est une fonction que l'on précisera. Montrer également que $\lim_{t\to T-} w(t,x) = 1_{\{x>K\}} + \frac{1}{2}1_{\{x=K\}}$.
7. Vérifier que $\mathbb{P}^*(S_T = K) = 0$ et en déduire que le prix à l'instant $t \in [0,T]$ du Call digital de strike $K > 0$ et d'échéance T c'est-à-dire l'option européenne de payoff $1_{\{S_T \geq K\}}$ est $e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2(t,S_t))$.

8. Justifier que pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(-x) = 1 - \mathcal{N}(x)$. Comparer les payoff du Call digital avec celui $1_{\{S_T<K\}}$ du Put digital et justifier sans calcul que le prix en $t \in [0,T]$ du Put digital est $e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2(t,S_t))$
9. Calculer $\partial_x w(t,x)$ et en déduire que $\partial_x w(t,K) \sim_{t\to T-} \frac{1}{K\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}$. En quoi cela peut-il poser problème pour la couverture du Call digital ?
10. Une alternative consiste à utiliser le portefeuille de couverture du Call spread de payoff $\frac{1}{\Delta}((S_T+\Delta-K)^+ - (S_T-K)^+)$ où $\Delta \in]0,K[$ pour couvrir le Call digital. Montrer que $\forall x > 0$, $\frac{1}{\Delta}((x+\Delta-K)^+ - (x-K)^+) = \frac{1}{\Delta}\int_{K-\Delta}^{K} 1_{\{x\geq y\}}dy$ et en déduire que la valeur terminale de ce portefeuille est supérieure au payoff du Call digital. Vérifier que la quantité d'actif risqué à détenir dans le portefeuille reste comprise entre 0 et $\frac{1}{\Delta}$.
11. On s'intéresse maintenant au Call digital américain qui rapporte $1_{\{S_t\geq K\}}$ à son acheteur lorsque celui-ci l'exerce à l'instant $t \in [0,T]$ de son choix et on suppose que $r \geq 0$. Vérifier que si $\tau^\star = \inf\{t \in [0,T] : S_t \geq K\}$ (avec convention $\inf \emptyset = T$) alors pour tout autre temps d'arrêt τ à valeurs dans $[0,T]$,
$$e^{-r\tau}1_{\{S_\tau\geq K\}} \leq e^{-r\tau^\star}1_{\{S_{\tau^\star}\geq K\}}$$
et en déduire le prix initial du Call digital américain.

Solution explicite d'EDS

On s'intéresse à l'équation différentielle stochastique
$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt,\ X_0 = x_0, \tag{1}$$
où $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions lipschitziennes de constante de Lipschitz L et $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Quel résultat assure l'existence d'une unique solution ?

On suppose que σ est continument différentiable et que $b = \frac{1}{2}\sigma\sigma'$.

2. Dans le cas où $\sigma(x) = \eta x$ avec $\eta > 0$, calculer b et donner la solution de (1).

On suppose également que σ est à valeurs dans $]0,+\infty[$ et on définit $\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sigma(y)}$.

3. Montrer que φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, que $\forall y \in \mathbb{R}$, $\sigma(y) \leq \sigma(0) + L|y|$ puis que $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$. En déduire que φ admet un inverse ψ défini sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $\psi(0)$, les dérivées ψ' et ψ'' puis $d\psi(B_t)$. En déduire que $(\psi(B_t))_{t\geq 0}$ est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique (1).
5. Vérifier également que $(\psi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire
$$\psi'(t) = \sigma(\psi(t)),\ \psi(0) = x_0. \tag{2}$$

On suppose désormais que $x_0 \in \mathbb{R}^d$, que $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est lipschitzienne et continuement differentiable et que $b = \frac{1}{2}\nabla\sigma\sigma$ où $\nabla\sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ désigne la matrice jacobienne de σ définie par $(\nabla\sigma)_{ij} = \frac{\partial\sigma_i}{\partial x_j}(x)$ pour $i,j \in \{1,\cdots,d\}$. On note toujours $\psi(t)$ de i-ème coordonnée $\psi_i(t)$ pour $i \in \{1,\cdots,d\}$ l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire (2).

6. Calculer $\psi_i''(t)$ pour $i \in \{1,\cdots,d\}$ et en déduire que $(\psi(B_t))_{t\geq 0}$ est toujours solution de l'équation différentielle stochastique (1).