

Calcul stochastique et finance

Examen du 11 juin 2025 (8h30-11h00)

Options européenne et américaine

On se place dans le cadre du modèle de Black&Scholes sur l'intervalle de temps $[0, T]$. On considère un marché financier qui comporte un actif sans risque de prix $S_t^0 = e^{rt}$ à l'instant t et un actif risqué de prix S_t à l'instant t dont l'évolution est régie par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt, \quad S_0 = s_0$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité, $\mu \in \mathbb{R}$ le rendement et $s_0 > 0$ le cours initial de l'actif. On notera $\mathbb{P}^*$ la probabilité de densité $e^{\frac{r-\mu}{\sigma} B_T - \frac{(r-\mu)^2 T}{2\sigma^2}}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma} t)_{t \in [0, T]}$ est un mouvement brownien. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}^*$ celle sous la probabilité $\mathbb{P}^*$. On considère une fonction de payoff $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ régulière t.q. $\sup_{x>0} \frac{\varphi(x)}{1+|x|} < \infty$.

1. Exprimer la valeur V_t en $t \in [0, T]$ de l'option européenne d'échéance T et de payoff $\varphi(S_T)$ sous la forme d'une espérance conditionnelle.
2. En déduire que $V_t = v(t, S_t)$ pour une fonction $v(t, x)$ à préciser sous forme d'espérance.
3. Quelle est la composition du portefeuille de couverture de l'option à l'instant $t \in [0, T]$?
4. Quelle est l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction v ?

On pose $u(t, x) = \partial_t v(t, x)$ et $\psi(x) = -\frac{\sigma^2 x^2}{2} \varphi''(x) - rx\varphi'(x) + r\varphi(x)$ pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^*$ et on suppose que la fonction $\partial_x u(t, x)$ est bornée sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

5. Vérifier que u est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_{xx} u(t, x) + rx \partial_x u(t, x) - ru(t, x) = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \\ u(T, x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}.$$

6. Pour $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^*$, calculer $d(e^{-rt} u(t+s, S_t^x))$ où $S_t^x = xe^{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$ et en déduire que $u(s, x) = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-s)} \psi(S_{T-s}^x)]$.

On suppose que la fonction ψ est négative.

7. En déduire que pour tout $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^*$, $\partial_s v(s, x) \leq 0$ et $v(s, x) \geq \varphi(x)$. Comment comparer V_0 et le prix initial de l'option américaine d'échéance T et dont l'acheteur reçoit $\varphi(S_s)$ s'il l'exerce à l'instant $s \in [0, T]$?
8. En quel sens généralisé l'inégalité $\psi \leq 0$ est-elle vraie dans le cas $\varphi(x) = (x - K)^+$ lorsque $r \geq 0$?

(Sur)-martingale exponentielle

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien sous $\mathbb{P}$ et $(\theta_t)_{t \in [0, T]}$ un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que $\mathbb{P}(\int_0^T \theta_s^2 ds < +\infty) = 1$. On pose $Z_t = e^{\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds}$ pour $t \in [0, T]$.

1. Que dire des trajectoires $[0, T] \ni t \mapsto Z_t$? En déduire que $\mathbb{P}(\int_0^T (\theta_t Z_t)^2 dt < +\infty) = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \inf\{t \in [0, T] : \int_0^t (\theta_s Z_s)^2 ds \geq n\}$ avec convention $\inf \emptyset = +\infty$.

2. Justifier que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_n = +\infty) = 1$.

3. Calculer dZ_t , en déduire que $Z_{t \wedge \tau_n} = 1 + \int_0^t 1_{\{s \leq \tau_n\}} \theta_s Z_s dW_s$ puis que $(Z_{t \wedge \tau_n})_{t \in [0, T]}$ est une martingale.
4. Soit $t \in [0, T]$. Montrer que $\mathbb{E}[Z_t] \leq 1$. En appliquant le lemme de Fatou pour l'espérance conditionnelle, vérifier que pour $s \in [0, t]$, $\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] \leq Z_s$.
5. Lorsque $\mathbb{E}[Z_t] < 1$, que valent $\mathbb{E}[\sup_{s \in [0, t]} Z_s]$ et $\mathbb{E}[\int_0^t (\theta_s Z_s)^2 ds]$?
6. Lorsque $\mathbb{E}[Z_T] = 1$, vérifier que pour tout $t \in [0, T]$, $Z_t = \mathbb{E}[Z_T | \mathcal{F}_t]$. Que peut-on alors dire de $(Z_t)_{t \in [0, T]}$?
7. On rappelle le critère de Novikov : si $(\vartheta_t)_{t \in [0, T]}$ un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que $\mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^T \vartheta_t^2 dt} \right] < +\infty$, alors $\mathbb{E} \left[e^{\int_0^T \vartheta_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \vartheta_t^2 dt} \right] = 1$. On suppose l'existence de $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_K = T$ tels que $\mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \theta_t^2 dt} \right] < \infty$ pour tout $k \in \{0, \dots, K-1\}$.
 - (a) Soit $k \in \{0, \dots, K-1\}$. Que vaut $\mathbb{E} \left[\frac{Z_{t_{k+1}}}{Z_{t_k}} \right]$? En déduire que $\mathbb{E} \left[\frac{Z_{t_{k+1}}}{Z_{t_k}} | \mathcal{F}_{t_k} \right] = 1$.
 - (b) Remarquer que $Z_T = \prod_{k=0}^{K-1} \frac{Z_{t_{k+1}}}{Z_{t_k}}$ et en déduire $\mathbb{E}[Z_T]$.
8. On suppose que le processus $(\theta_t)_{t \in [0, T]}$ est borné au sens où $\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\theta_t| \leq \gamma \right) = 1$ pour une constante $\gamma \in [0, +\infty[$. Remarquer que $Z_t^2 \leq e^{\int_0^t 2\theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (2\theta_s)^2 ds + \gamma^2 t}$. En déduire que $\mathbb{E}[(\theta_t Z_t)^2] \leq \gamma^2 e^{\gamma^2 t}$ puis que $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale.
9. On suppose dans cette question que le processus $(\theta_t)_{t \in [0, T]}$ est continu et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tilde{\nu}_n = \inf\{t \in [0, T] : |\theta_t| \geq n\}$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.
 - (a) Que vaut $\mathbb{E}[Z_{T \wedge \tilde{\nu}_n}]$?
 Soit $\tilde{\mathbb{P}}_n$ la probabilité de densité $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_n}{d\mathbb{P}} = Z_{T \wedge \tilde{\nu}_n}$ par rapport à $\mathbb{P}$.
 - (b) Vérifier que $\mathbb{E}[Z_T 1_{\{\tilde{\nu}_n = +\infty\}}] = 1 - \tilde{\mathbb{P}}_n(\tilde{\nu}_n \leq T)$. En déduire que $\tilde{\mathbb{P}}_n(\tilde{\nu}_n \leq T)$ admet une limite pour $n \rightarrow \infty$ et que $\mathbb{E}[Z_T] = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{P}}_n(\tilde{\nu}_n \leq T)$.
 - (c) Que peut-on dire de $(B_t^n = W_t - \int_0^{t \wedge \tilde{\nu}_n} \theta_s ds)_{t \in [0, T]}$ sous $\tilde{\mathbb{P}}_n$?
10. On suppose dans cette question que $\theta_t = f(W_t)$ pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne.
 - (a) Vérifier que $(\theta_t)_{t \in [0, T]}$ est continu.
 - (b) Quel résultat assure l'existence d'une unique solution pour l'ÉDS

$$X_t = W_t + \int_0^t f(X_s) ds, \quad t \in [0, T]?$$

Comme $W_t = B_t^n + \int_0^{t \wedge \tilde{\nu}_n} f(W_s) ds$, on en déduit que sous $\tilde{\mathbb{P}}_n$, $(W_{t \wedge \tilde{\nu}_n})_{t \in [0, T]}$ a même loi que $(X_{t \wedge \nu_n})_{t \in [0, T]}$ sous $\mathbb{P}$ où $\nu_n = \inf\{t \in [0, T] : |f(X_t)| \geq n\}$.

- (c) Vérifier que $\tilde{\mathbb{P}}_n(\tilde{\nu}_n \leq T) = \mathbb{P}(\nu_n \leq T)$ puis que $\mathbb{E}[Z_T] = 1$.
- (d) Pour $0 \leq s \leq t \leq T$, comparer $\mathbb{E}[Z_t^2 | \mathcal{F}_s]$ et Z_s^2 . En déduire que $t \mapsto \mathbb{E}[Z_t^2]$ est croissante sur $[0, T]$.
- (e) On suppose que $f(x) = \alpha x$ avec $\alpha > 0$. Vérifier que $Z_t^2 = e^{\alpha(W_t^2 - t) - \alpha^2 \int_0^t W_s^2 ds}$. Pour $s \in [0, t]$, rappeler la loi conditionnelle de W_s sachant W_t , en déduire que $\mathbb{E}[W_s^2 | W_t] = \frac{s^2 W_t^2}{t^2} + \frac{s(t-s)}{t}$ puis que $\mathbb{E}[Z_t^2 | W_t] \geq e^{(\alpha - \frac{\alpha^2 t}{3}) W_t^2 - \alpha t - \frac{\alpha^2 t^2}{6}}$. En déduire que si $\alpha - \frac{\alpha^2 t}{3} \geq \frac{1}{2t}$, $\mathbb{E}[Z_t^2] = +\infty$. Conclure que si $\alpha T > \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, alors pour $\mathbb{E}[Z_t^2] = +\infty$ pour $t \in [\frac{3-\sqrt{3}}{2\alpha}, T]$.