Cours de calcul stochastique et finance
Projets informatiques

Ils peuvent être réalisés en binômes (de deux élèves au plus !). Chaque binôme doit rendre un rapport de projet **sous forme papier** au plus tard le *mercredi 19 juin 2024* à Benjamin JOURDAIN (CERMICS). Les rapports comporteront une partie théorique introduisant le problème étudié et une partie consacrée aux résultats obtenus par simulation et à leur interprétation. Chaque tiret − correspond à un sujet. Les élèves désirant traiter un sujet ne figurant pas sur la liste ci-dessous doivent s'assurer de l'accord du responsable du cours.
Quelques valeurs raisonnables pour les paramètres du modèle de Black-Scholes : $r \in [0.03, 0.1]$, $\mu \in [-0.05, 0.2]$, $\sigma \in [0.05, 0.2]$, T entre 0.25 et 1 an, S_0 de l'ordre de quelques dizaines d'euros, $K \in [0.8S_0, 1.2S_0]$.

Thèmes proposés

1. **Gestion et couverture d'un portefeuille d'options** (3 projets)
   — simulation et exercice de couverture [2] (voir également paragraphe 9.4.2 du livre).
   — Erreur quadratique de couverture en temps discret [1] : pour $f(x) = (x - K)^+$, $N \in \{1, 4, 16, 64, 256\}$ et différentes valeurs de μ, calculer $N\mathbb{E}^*\left[(f(S_T) - V_T^N)^2\right]$ et $N\mathbb{E}\left[(f(S_T) - V_T^N)^2\right]$ par Monte-Carlo.
2. **Options sur maximum** (2 projets) : option de payoff $(\max_{[0,T]} S_t - K)^+$
   — calcul explicite du prix et du delta lorsque r et σ sont constants (exercice 21 p81 et exercice 30 p103) + exercice de couverture [2](représenter $(\max_{[0,T]} S_t, V_T)$ pour un grand nombre de trajectoires indépendantes du sous-jacent).
   — calcul du prix par Monte-Carlo : évaluer la vitesse de convergence en fonction du pas de discrétisation.
3. **Options barrières** (2 projets). Voir exercice 21 p81 et exercice 30 p103. On étudiera le "call down and out" de payoff $1_{\{\forall t \in [0,T],\, S_t \geq H\}}(S_T - K)^+$ avec $H < S_0$.
   — Établir et implémenter une formule explicite lorsque r et σ sont constants + exercice de couverture [2] (représenter $(1_{\{\min_{[0,T]} S_t < H\}} S_T, V_T)$ pour un grand nombre de trajectoires indépendantes du sous-jacent).
   — Calcul du prix par Monte-Carlo : évaluer la vitesse de convergence en fonction du pas de discrétisation.
4. **Options sur moyenne** : payoff $(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K)^+$ (2 projets). Dans les deux projets on commencera par approcher le prix de l'option par la formule de type Black-Scholes donnant l'espérance de $e^{-rT}(X-K)^+$ où X est une variable aléatoire lognormale de même espérance et variance que $\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$ sous la probabilité risque-neutre. Puis on effectuera
   — le calcul par Monte-Carlo du prix : étude de la vitesse de convergence en fonction du pas de discrétisation en temps, comparaison des approximations de l'intégrale de type rectangles ou trapèzes
   — la mise-en-oeuvre d'une technique de variable de contrôle (Kemna et Vorst) : calcul explicite du prix de l'option de payoff $\left(\exp(\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt) - K\right)^+$ et évaluation de la différence avec le prix de l'option sur moyenne par Monte-Carlo.
5. **Call digital** : payoff $1_{\{S_T \geq K\}}$(3 projets)
   — Formule explicite pour le prix et la couverture + exercice de couverture [2] et comparaison avec des options classiques.
   — Réduction de variance par fonction d'importance optimale [1].
   — Exprimer le delta sous forme d'espérance [1] et le calculer par Monte-Carlo (comparaison avec la formule explicite).
6. **Put américain** (4 projets)
   — Comparaison des méthodes de Mac Millan (ex. 32 p142) et de Brennan-Schwartz (rem. 5.3.5 p140).

2. **exercice de couverture :** Après choix d'un pas de discrétisation en temps, faire évoluer un portefeuille auto-financé de valeur initiale la prime de l'option et tel que la quantité d'actif risqué détenue sur chaque pas de temps est le delta calculé au début du pas. Pour deux valeurs au moins de μ et pour différentes valeurs du pas de temps évaluer par la méthode de Monte-Carlo l'espérance sous la probabilité historique du carré de la différence entre valeur terminale du portefeuille et payoff de l'option. Comportement de cette espérance lorsque le pas de temps tend vers 0 ? Dans le cas d'une option vanilla de payoff $\varphi(S_T)$, représenter pour un grand nombre de trajectoires indépendantes sous la probabilité historique le couple (S_T, V_T) (valeur du sous-jacent et du portefeuille à maturité) et comparer au payoff de l'option.

— Calcul du put américain dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein (exercice 7 p47) et convergence vers le modèle de Black-Scholes (paragraphe 1.4).
— Calcul du Put américain par méthode de Monte-Carlo [1].
— Calcul du Put américain : formule d'exercice anticipé + approximation de la frontière d'exercice [1].

7. **Options d'échange** (1 projet). Voir problème 3 p106 et TD7. Établir et implémenter une formule explicite + exercice de couverture [2](représenter $(S_T^1 - S_T^2, V_T)$ pour un grand nombre de trajectoires indépendantes des sous-jacents).

8. **Options sur indice** (3 projets) payoff $(K - \sum_{n=1}^N a_n S_T^n)^+$ où les a_n sont positifs t.q. $\sum_{n=1}^N a_n = 1$ et les S_T^n sont générés par des modèles de Black-Scholes avec des Browniens éventuellement corrélés.
— Calcul du prix par simulation : comparaison des nombres aléatoires et des suites à discrépance faible [1] en fonction de la dimension N.
— Calcul du prix par Monte-Carlo avec ou sans utilisation de la moyenne géométrique $\prod_{n=1}^N (S_T^n)^{a_n}$ comme variable de contrôle : calculer explicitement le prix de l'option avec moyenne arithmétique remplacée par moyenne géométrique et évaluer la différence avec le prix de l'option de départ par Monte-Carlo.
— Calcul du prix par Monte-Carlo avec fonction d'importance [1].

9. **Options sur devises** (2 projets). On utilisera le modèle de Garman-Kohlhagen (problème 2 p104).
— options européennes : programmer prix et delta du Call + exercice de couverture [2]
— Etablir l'EDP de pricing dans le cas du Put américain et implémenter l'algorithme de Brennan-Schwarz.

10. **Coûts de transaction** (2 projets) On se placera dans le modèle de Black-Scholes et on supposera que les coûts de transaction sont proportionnels au montant des transactions. On tiendra compte de ces coûts dans la gestion du portefeuille, on étudiera le défaut de couverture et les coûts de transaction en fonction de la fréquence d'intervention.
— Cas d'un Call standard
— Comparaison des coûts de transaction entre un Put digital $1_{\{S_T \leq K\}}$ à la monnaie forward ($K = S_0 e^{rT}$) et un Put spread de payoff $(K + 1 - S_T)^+ - (K - S_T)^+$.

11. **Modèle CEV**(1 projet) On suppose que l'actif risqué satisfait $dS_t = \sigma\sqrt{S_t} dB_t + \mu S_t dt$: établir une formule pour le prix du Call (voir CIR paragraphe 6.2.2) et représenter le smile de volatilité implicite [3].

12. **Modèles à volatilité stochastique** (3 projets) Evaluer le prix des Calls et représenter le smile de volatilité implicite [3] :
— dans le modèle de Hull et White [1].
— dans le modèle de Stein et Stein [1].
— dans le modèle de Heston [1].

13. **Modèles avec sauts**(2 projets) (cf. chapitre 7).
— calcul des options européennes dans les modèles avec sauts : programmer les formules correspondant à l'exercice 47 p189 et étudier le smile de volatilité implicite [3]
— dans le cas du modèle précédent, simulation de la couverture optimale. Étude du risque résiduel de couverture en fonction de la fréquence de couverture.

14. **Modèles de taux d'intérêt** (4 projets, cf. chapitre 6).
— calcul et implémentation des prix des obligations et des options dans le modèle de Vasicek (cf paragraphe 9.4.3).
— calcul et implémentation des prix des obligations dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross.
— calcul et implémentation des prix des options dans le modèle de Heath-Jarrow-Morton (exercice 41).
— couverture (formule explicite) et gestion du portefeuille par simulation dans le cas d'un call sur zéro coupon dans le modèle de Vasicek (cf paragraphe 9.4.3).

3. **smile :** vérifier que le prix Black-Scholes du Call d'échéance T de strike K est une fonction strictement continue croissante de σ qui tend vers $(S_0 - Ke^{-rT})^+$ lorsque $\sigma \to 0$ et vers S_0 lorsque $\sigma \to +\infty$, limites qui sont deux bornes d'arbitrage. En déduire que si un modèle donne un prix entre ces deux bornes, on peut inverser la formule de Black-Scholes pour obtenir la volatilité implicite associée à ce prix. A une maturité fixée, la courbe qui associe au strike K la volatilité implicite correspondante s'appelle smile.