Méthodes mathématiques pour la finance :
Résumé sur l'intégrale stochastique

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard.

Intégrale stochastique : Soit $T > 0$ déterministe et $(H_t)_{t\in[0,T]}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté tel que $\mathbb{P}\left(\int_0^T H_t^2 dt < \infty\right) = 1$. Alors on peut construire $(\int_0^t H_s dW_s)_{t\in[0,T]}$ comme processus $\mathcal{F}_t$-adapté continu.

Linéarité : Si $(\tilde{H}_t)_{t\in[0,T]}$ est un autre processus $\mathcal{F}_t$-adapté tel que $\mathbb{P}\left(\int_0^T \tilde{H}_t^2 dt < \infty\right) = 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in [0,T],\ \int_0^t (H_s + \lambda \tilde{H}_s) dW_s = \int_0^t H_s dW_s + \lambda \int_0^t \tilde{H}_s dW_s.$$

Isométrie d'Itô, martingale, moments : Si $\mathbb{E}\left(\int_0^T H_t^2 dt\right) < \infty$, $(\int_0^t H_s dW_s)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale centrée i.e. $\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s dW_s\right) = 0$ vérifiant l'isométrie

$$\forall t \in [0,T],\ \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$$

$$\text{et } \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) \text{ par l'inégalité de Doob.}$$

Notons que pour $t \in [0,T]$ et $H_t = \sum_{k=0}^{p-1} h_k 1_{]t_k,t_{k+1}]}(t)$ processus élémentaire avec $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_p = T$ et h_k variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable bornée, $\int_0^t H_s dW_s = \sum_{k=0}^{p-1} h_k (W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k})$, somme pour laquelle l'égalité

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{p-1} h_k (W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k})\right)^2\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{E}(h_k^2)(t\wedge t_{k+1} - t\wedge t_k)$$

a été établie au TD3. Comme $\sum_{k=0}^{p-1} \mathbb{E}(h_k^2)(t\wedge t_{k+1} - t\wedge t_k) = \int_0^t \mathbb{E}(H_s^2) ds$ la propriété d'isométrie en découle. Pour $s \in [0,t]$, en notant j l'indice dans $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ tel que $s \in [t_j, t_{j+1}]$, la propriété de martingale découle de

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{p-1} h_k (W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}) \Big| \mathcal{F}_s\right] = \sum_{k=0}^{j-1} h_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + h_j (\underbrace{\mathbb{E}[W_{t\wedge t_{j+1}}|\mathcal{F}_s]}_{W_s} - W_{t_j}) + \sum_{k=j+1}^{p-1} \mathbb{E}[h_k \underbrace{\mathbb{E}[W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}|\mathcal{F}_{t_k}]}_{\mathbb{E}[W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}]=0} |\mathcal{F}_s]$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} h_k (W_{s\wedge t_{k+1}} - W_{s\wedge t_k}) = \int_0^s H_r dW_r$$

Arrêt : Si τ est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt à valeurs dans $[0,T]$, $\int_0^\tau H_s dW_s = \int_0^T 1_{\{s\leq\tau\}} H_s dW_s$.

Processus d'Itô : $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,\ t \geq 0$ où

- X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable,
- $(K_t)_{t\geq 0}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté tel que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}\left(\int_0^t |K_s| ds < \infty\right) = 1$,
- $(H_t)_{t\geq 0}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté tel que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}\left(\int_0^t H_s^2 ds < \infty\right) = 1$,

La décomposition est unique : lié à

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{kt/n}^{(k+1)t/n} H_s dW_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right) \text{ par isométrie alors que}$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{kt/n}^{(k+1)t/n} K_s ds\right)^2\right) \leq \frac{t}{n}\mathbb{E}\left(\int_0^t K_s^2 ds\right) \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.}$$

Formule d'Itô : Soit $f : \mathbb{R}^2 \ni (t,x) \to f(t,x) \in \mathbb{R}$ une fonction $C^{1,2}$ (continûment dérivable par rapport à t et deux fois continûment dérivable par rapport à x). Alors $\forall t \geq 0$,

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s) ds + \int_0^t \partial_x f(s, X_s) \underbrace{dX_s}_{K_s ds + H_s dW_s} + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{xx} f(s, X_s) \underbrace{d < X >_s}_{H_s^2 ds}.$$

Le terme en rouge vient de la variation quadratique du mouvement brownien (c'est un terme supplémentaire par rapport au calcul différentiel et intégral usuel).
Lorsque le processus d'Itô est le mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ lui-même, en écrivant une somme télescopique puis en effectuant un dévelopement de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned}
f(t, W_t) - f(0,0) &= \sum_{k=0}^{n-1}(f((k+1)t/n, W_{(k+1)t/n}) - f(kt/n, W_{kt/n})) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \partial_s f(kt/n, W_{kt/n}) t/n && \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \partial_s f(s, W_s) ds \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \partial_x f(kt/n, W_{kt/n})(W_{(k+1)t/n} - W_{kt/n}) && \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \partial_x f(s, W_s) dW_s \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \partial_{xx} f(kt/n, W_{kt/n})(W_{(k+1)t/n} - W_{kt/n})^2 && \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{xx} f(s, W_s) ds \\
&+ R_n && \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

où

- la première convergence est la convergence presque sûre d'une somme de Riemann vers l'intégrale correpondante et repose sur la continuité du mouvement brownien,
- la seconde convergence découle de la construction de l'intégrale stochastique,
- la troisième convergence est une généralisation de la convergence de $\sum_{k=0}^{n-1}(W_{(k+1)t/n} - W_{kt/n})^2$ vers t vue en TD3,
- la quatrième convergence découle de l'ordre $(t/n)^{3/2}$ des plus gros termes négligés $\frac{t}{n}(W_{(k+1)t/n} - W_{kt/n})$ et $(W_{(k+1)t/n} - W_{kt/n})^3$.