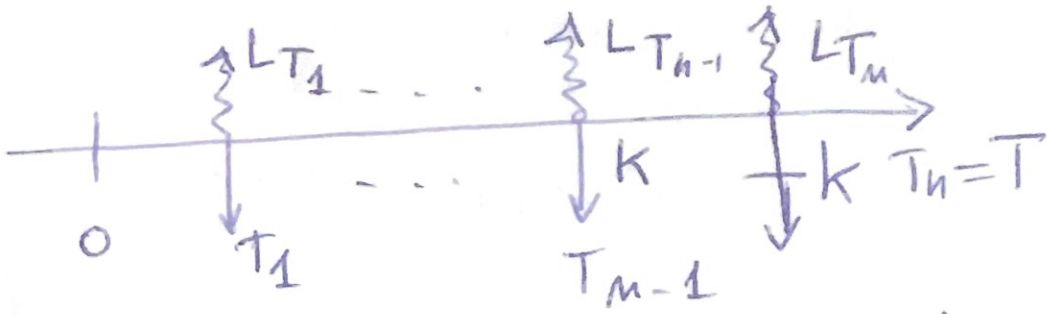
METMF : Cours 1 : Modèles de taux d'intérêt (1)

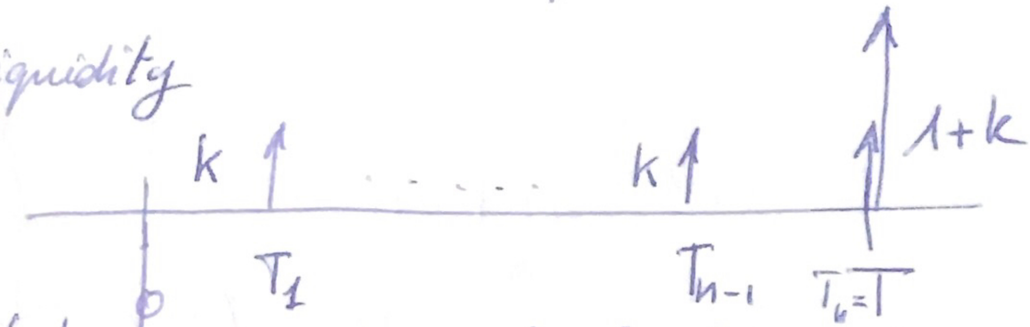
1. Produits de taux d'intérêt et taux de référence : brève introduction

- Nous avons supposé tx intérêt c^{st} et déterministe i.e.
  - emprunter à tout horizon à le m̂ coût,
  - ce coût ne change pas au cours du temps,
- Le tx d'intérêt n'est pas constant et varie au cours du temps.
- Deux types de marchés :
  - OTC : swap, libor, OIS
  - obligataire : émissions état et entreprises.
- OTC : swap, libor, OIS : contrats entre deux contreparties garantie ou pas par un collatéral.
  - libor : consensus de coût d'un prêt non garanti à 3M, 6M, 1M, publié daily
  - OIS : consensus de coût d'un prêt garanti à 1M, 3M, 6M, publié daily
  - SWAP :



1Y, 2Y, ... 10Y, 20Y $\xrightarrow{\text{liquidity}}$

- obligataire :



émission de dette par état ou entreprise (credit risk)

2 Obligation zéro-coupon

Choose your currency

df : Titre donnant droit à 1 GBP / USD / EUR / ¥ à une date future T

Soit $P_{t,T}$ le prix du zéro-coupon à l'instant t,

A Pricing avec courbe déterministe.

$$P_{t,T} = e^{-(T-t)R_{t,T}} \quad \forall \; 0 \leq t \leq T$$

$\Rightarrow$ $\exists$ une fonction $(r(t))_{t \geq 0}$:

$$P_{t,T} = e^{-\int_t^T ds\, r(s)}$$

B Pricing en avenir incertain:

- r_t : taux d'emprunt entre les instants t et t+dt
- $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t^W)_{0 \leq t \leq T})$ espace probabilisé
- $(\mathcal{F}_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ filtration naturelle d'un BM $(W_t)_{t \geq 0}$
- actif sans risque $S_t^0 = e^{\int_0^t ds\, r_s}$

  $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ processus adapté : $\int_0^T |r_s| ds < \infty$ p.s.

- $(P_{t,u})_{0 \leq t \leq u}$: $P_{u,u} = 1$ processus adapté donnant le prix du ZCB.

(H) Il existe $P^* \sim P$ sous laquelle $\forall\, u \in [0,T]$ ©

$(\tilde{P}_{t,u})_{0 \le t \le u}$, $\tilde{P}_{t,u} = e^{-\int_0^t ds\, R_s} P_{t,u}$ est

martingale,

$$\Rightarrow \quad P_{t,u} = \mathbb{E}^*\left[e^{-\int_t^u ds\, R_s} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right]$$

P1

$\forall\, X$ v.a. positive $\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[X L_T]$

L_T est la densité de P^* par rapport à P

et si X est $\mathcal{F}_t$ - mesurable $\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[X L_t]$

Proposition : Il existe un processus adapté $(q_t)_{0 \le t \le T}$ tq pour tout $t \in [0,T]$

P2 $$L_t = e^{\int_0^t q_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t q_s^2 ds} \quad P\text{-p.s.}$$

Corollaire : $$P_{t,u} = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^u ds\, r_s - q_s dW_s + \frac{1}{2} q_s^2 ds} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right]$$

P3

Proposition : $\forall\, u \ \exists\, (\sigma_t^u)_{0 \le t \le u}$ tq

P4 $$dP_{t,u} / P_{t,u} = (r_t - \sigma_t^u q_t)dt + \sigma_t^u dW_t$$

3 Options sur obligations :

Proposition : On suppose $\sup_{0 \leq t \leq T} |r_t| < \infty$ p.s.

P5

et $\sigma_t^T \neq 0$ p.s. $\forall t \in [0, \theta]$

Soit $\theta < T$ et h $\mathcal{F}_\theta$-mesurable t.q. $h e^{-\int_0^\theta r_s ds} \in L^2(P^*)$

Alors $\exists$ une stratégie admissible dont la valeur à l'instant θ est h et sa valeur à l'instant t est :

$$V_t = \mathbb{E}^* \left[e^{-\int_t^\theta ds\, r_s} h \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right]$$

4 Retour sur le pricing des produits de taux :

- Libor
- swap
- obligations

Preuves et demonstrations:

P1 $\tilde{P}_{t,u} = \mathbb{E}^*\left[\tilde{P}_{u,u} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$ par propriété de martingale

$$e^{-\int_0^t ds R_s} P_{t,u} = \mathbb{E}^*\left[e^{-\int_0^u ds R_s} \times 1 \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$\Rightarrow P_{t,u} = \mathbb{E}^*\left[e^{-\int_t^u ds R_s} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

P2 $\cdot (L_t)_{0\le t\le T}$ est une martingale % à $(\mathcal{F}_t^W)_t$

$\Rightarrow \exists\ (H_t)_{0\le t\le T}$ processus adapté : $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$ p.s.

et $L_t = L_0 + \int_0^t H_s \, dW_s$ p.s.

$\cdot\ L_T$ est une densité de probabilité donc $\mathbb{E}[L_T] = 1$

$\cdot\ P^* \sim P \Rightarrow P(L_t > 0) = 1 \quad \forall t$

$$\log(L_t) \overset{\text{Itô}}{=} \int_0^t \frac{1}{L_s} H_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{H_s^2}{L_s^2} ds \quad p.s.$$

P3 ok

P4 $(\tilde{P}_{t,u})_{0\le t\le u}$ martingale sous P^*

$\Rightarrow (\tilde{P}_{t,u} L_t)_{0\le t\le u}$ martingale sous P $\Big]$ $\exists\, (\theta_t^u)_{0\le t\le u}$ tq

$\int_0^u (\theta_t^u)^2 dt < \infty$

$\cdot\ \tilde{P}_{t,u} L_t > 0$ p.s. $\forall t \in [0,u]$

$\tilde{P}_{t,u} L_t = \tilde{P}(0,u) e^{\int_0^t \theta_s^u dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\theta_s^u)^2 ds}$

P5 $(H^0_t, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ stratégie admissible et $\tilde{V}_t$ sa valeur actualisé :

$$d\tilde{V}_t = H_t \, d\tilde{P}_{t,T} = H_t \, \tilde{P}_{t,T} \, \sigma^T_t \, dW^*_t$$

car $\sup_{t \in [0,T]} \tilde{V}_t$ est dans $L^2(P^*)$

$$\Rightarrow \quad \forall \theta \geq t \quad \tilde{V}_t = E^*[\tilde{V}_\theta \mid \mathcal{F}_t]$$

si $V_\theta = h$ on obtient bien $V_t = E^*\left[e^{-\int_t^\theta ds R_s} h \mid \mathcal{F}_t\right]$

$\exists (J_t)_{0 \leq t \leq \theta}$ tq $\int_0^\theta ds J_s^2 < \infty$ p.s. et

$$h e^{-\int_0^\theta ds R_s} = E^*\left(h e^{-\int_0^\theta ds R_s}\right) + \int_0^\theta J_s \, dW^*_s$$

on peut poser $H_t = \dfrac{J_t}{\tilde{P}_{t,T} \, \sigma^T_t}$, $H^0_t = E^*\left[h e^{-\int_0^\theta ds R_s}\right] - \dfrac{J_t}{\sigma^T_t}$