METMF : Cours 2 : Changement de numéraire, mesure forward et modèles de marché de taux.

0 Rappels

- Nous avons montré que le prix d'une obligation ZC s'exprime sous la forme :

$$P_{t,T} = E^*\left[e^{-\int_t^T ds\, r_s} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^W \right]$$

- E^* espérance sous P^* probabilité RN
- $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ filtration naturelle associée à un BM $(W_t)_{t\geq 0}$ sous P^*
- $(r_s)_{s\geq 0}$ est le taux instantané : tx d'emprunt entre t et $t+dt$.

- Sous l'H d'une dynamique (EDS) de type affine du taux instantané sous P^*, par ex Vasicek : $dr = a(b-r)dt + \sigma dW$
$P_{t,T}$ admet une expression analytique en fonction de r :

$$P_{t,T} = P(T-t, r_t)$$

- Aussi sous P $dP_{t,u}/P_{t,u} = (r_t - \sigma_t^u q_t)dt + \sigma_t^u dW_t$ processus adapté
- Valorisation et couverture d'options sur ZCB

→ Retour sur la dernière proposition du cours 1.

1. Changement de numéraire et mesure forward

A Changement de numéraire

DF Un numéraire est une référence monétaire dont la valeur en €/$/£ (selon le marché) est un processus aléatoire adaptée, positif et C^0. Par exemple le money-market acc $S_t^0 = e^{\int_0^t r_s ds}$

Proposition : (i) La notion de stratégie simple autofinançante est invariante par changement de numéraire,

(ii) Si un actif S^0 est choisi comme numéraire, toute intégrale stochastique $\frac{x}{S^0} + \int_0^t H_u \, d\left(\frac{S_u}{S_u^0}\right)$ d'un processus adapté $(H_u)_u$ est la valeur d'un portefeuille autofinancé.

Preuve : $V_t(\phi) = \sum_{k=0}^{n} \phi_t^k S_t^k$

$$dV_t(\phi) = \sum_{k=0}^{n} \phi_t^k \, dS_t^k \quad \text{par autofinancement}$$

$$d\left(\frac{V_t(\phi)}{X_t}\right) = dV_t(\phi)\frac{1}{X_t} + V_t(\phi)\, d\left(\frac{1}{X_t}\right) + d\left\langle V(\phi), \frac{1}{X}\right\rangle_t$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \phi_t^k \frac{dS_t^k}{X_t} + \phi_t^k S_t^k \, d\left(\frac{1}{X_t}\right) + \phi_t^k \, d\left\langle S^k, \frac{1}{X}\right\rangle_t$$

TH Soit X un numéraire et M le numéraire de marché associé à la probabilité RN P^* : ⓔ

$$M_t = e^{\int_0^t ds\, r_s},$$

Si $\frac{X}{M}$ est une P^*- martingale U.I.

Alors il existe Q^X une probabilité df par

$$\frac{dQ^X}{dP^*} = \frac{X_T}{M_T}\,\frac{M_0}{X_0}$$ la dérivé de RN % à P^*

Les X - prix sont des Q^X- martingales locales.

Preuve : par $\underline{\underline{H}}$ $\frac{X}{M}$ est une martingale

$$E^{P^*}\left[\frac{X_T}{M_T}\,|\mathcal{F}_t\right] = \frac{X_t}{M_t} \quad \text{et} \quad E^{P^*}\left[\frac{X_T}{M_T}\,|\mathcal{F}_0\right] = \frac{X_0}{M_0}$$

$$\Rightarrow E^{P^*}\left[\frac{dQ^X}{dP^*}\,|\mathcal{F}_0\right] = 1$$ et donc Q^X est une mesure de probabilité,

Soit ϕ un portefeuille autofinancé sous P^* tq

$\left(\frac{V_t(\phi)}{M_t}\right)_t$ est une P^*- martingale

$$\frac{V_t(\phi)}{M_t} = \frac{V_t(\phi)}{X_t} \times \frac{X_t}{M_t} \times \frac{M_0}{X_0} \times \frac{X_0}{M_0}$$ est Q^X-martingale

densité de proba

Corollaire : Soit (X,Y) deux numéraires tels que $(\tilde{X},\tilde{Y})$ soient P^*-martingales et (Q^X,Q^Y) les mesures martingales associées.

Alors (Y^X_t) (resp. X^Y_t) est Q^X (resp Q^Y) martingale et

$$\frac{dQ^Y}{dQ^X} = \frac{Y^X_T}{Y^X_0} \qquad \frac{dQ^X}{dQ^Y} = \frac{X^Y_T}{X^Y_0}$$

$$Y^X_t := \frac{Y_t}{X_t} \quad ; \quad X^Y_t = \frac{X_t}{Y_t}$$

En particulier pour toute v.a. bornée $\mathcal{F}_T$-mesurable

$$V(\phi_T) = E_{P^*}\left[e^{-\int_t^T ds R_s}\phi_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = X_t E^{Q^X}\left[\phi^X_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

B Mesure forward

Df Mesure T-forward est la mesure associé au numéraire $(P_{t,T})_{t\geq 0}$.

$$\frac{dP^T}{dP^*} = \frac{P_{T,T}}{P(0,T)} e^{-\int_0^T ds R_s} \Rightarrow E^*\left[e^{-\int_t^T ds R_s} h \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = P_{t,T} E^T[h|\mathcal{F}$$