0 Rappels

- Nous avons montré que l'on peut choisir une référence monétaire (un numéraire i.e. un processus positif adapté) et exprimer les valeurs des actifs (prix des produits dérivés et portefeuilles de couverture) par rapport à cette référence. Il existe alors une mesure de probabilité sous laquelle ces prix relatifs sont martingales.

- Le TH de changement de numéraire donne une expression analytique de la dérivé de RN entre la mesure risque neutre et la mesure martingale associé au numéraire :

$$\left.\frac{dQ^X}{dP^*}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{X_T}{M_T} \cdot \frac{M_t}{X_t}$$

- P^* mesure risque neutre
- M le martingale de marché
- X le numéraire
- Q^X la mesure associé à X.

- La notion de portefeuille autofinancé est invariante par rapport au numéraire.

- Un exemple important est la mesure T-forward i.e. la mesure associé au numéraire obligation ZC $(P_{t,T})_t$. En appliquant le th de changement de numéraire on a :

$$\mathbb{E}^{P^*}\left[e^{-\int_t^T ds\, r_s} \cdot h \mid \mathcal{F}_t\right] = P_{t,T}\, \mathbb{E}^{Q^T}\left[h \mid \mathcal{F}_t\right]$$

- BGM est un modèle de marché de taux qui modélise les "observables" de marché ; les libors forward sous les probabilités forwards correspondantes.

  * $L_t(T_i, T_{i+1})$ le taux libor forward entre deux dates T_i, T_{i+1} est T_{i+1}-martingale

  * $$d L_t(T_i, T_{i+1}) = \sigma_t^i \, dW_t^{Q^{T_{i+1}}} \quad \forall i$$

    où $W^{Q^{T_{i+1}}}$ est un $Q^{T_{i+1}}$-BM.

les actifs de taux sont ensuite exprimé comme des fonctions de $\left(L_t(T_i, T_{i+1})\right)_{i=1}^N$.

1 Funding et multi-courbe

- Nous avons jusqu'ici supposé que le taux d'emprunt (pour financer la construction du portefeuille de couverture) est identique au taux de rémunération du cash. Aussi, nous avons ignoré l'existence de garanties dans les contrats de gré à gré.

- En pratique les contrats de gré à gré sont garantis par la présence de collatéral.

- la présence ou pas de collatéral, le type de collatéral (par exemple la monnaie du collatéral) et les règles qui détermine le type et la façon dont on peut échanger le collatéral change le taux d'emprunt et d'actualisation des flux future.

A L'impact de la collatéralisation

Soit un contrat dérivé générique, V_t sa valeur et S_t le prix du sous jacent. Analysons les cash flows d'un contrat ENTIÈREMENT COLLATÉRALISÉ EN CASH

On se pose du point de vue du vendeur :

en t :

1 On reçoit la prime V_t

2 on verse le montant V_t en cash à l'acheteur (pour lui garantir le payoff futur)

3 On emprunte $\Delta_t . S_t$ en cash.

4 On achète la quantité Δ_t de sous jacent S_t

(5 on peut éventuellement faire un contrat de repo.)

en t+dt :

1 On reçoit $c_t V_t \, dt$ (où c_t est le taux de rémunération du collatéral)

2 on paye les intérêt $\Delta_t S_t f_t \, dt$ sur le prêt,

(3 on reçoit les intérêt sur le repo) $\Delta_t S_t m_t \, dt$

par complétude et autofinancement :

$$V_{t+dt} - V_t = c_t V_t \, dt - \Delta_t S_t (f_t - m_t) dt + \Delta_t (S_{t+dt} - S_t)$$

(I)

l'équation d'autofinancement classique :

$$(II) \quad V_{t+dt} - V_t = r_t \left(V_t - \Delta_t S_t\right) dt + \Delta_t \left(S_{t+dt} - S_t\right)$$

où r_t est le taux sans risque auquel on emprunte et on rémunère le cash.

Si on suppose $c_t = f_t - m_t$ alors (I) est équivalente à (II) avec $r_t = c_t$ ce qui implique :

$$V_t = E\left[e^{-\int_t^T ds\, c_s} V_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

Comment valoriser V_t ?

- construire un modèle pour c et pour S
- effectuer un changement de numéraire :

$$V_t = P^c_{t,T}\, E^{c,T}\left[V_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

- utiliser une approche par spread.

$$V_t = E\left[e^{-\int_t^T ds\, c_s} V_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = E\left[e^{-\int_t^T ds\, c_s - R_s + R_s} V_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

si $c - R$ ind R

$$\Leftrightarrow \overbrace{E\left[e^{-\int_t^T ds\, c_s - R_s} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]}^{\text{spread}}\; E\left[e^{-\int_t^T ds\, R_s} V_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \quad \text{prix classique}$$

2 CVA

- Df: Le CVA : crédit value adjustment est le coût de la couverture du risque ~~de crédit~~ de défaut de la contrepartie.

- Nous n'avons pas pri en compte le scénario ou notre contrepartie pourrait faire défaut et ne pas honoré les termes du contrat dérivé.

- La crise financière de 2008 a mis en évidence l'importance de la prise en compte de ce risque dans la valorisation des produits.

- Si le contrat est collatéralisé on est uniquement exposé au risque de défaut entre deux appels de marge.

↓

DF: instants auxquels les contreparties échangent du collatéral pour ajuster le montant détenu à la variation de prix du produit dérivé.

Notions de calcul:

- Soit un contrat dérivé de sous-jacent S_t, soit V_t sa valeur en date t
- Notons τ le temps de défaut de la contrepartie du contrat.
- On suppose que τ est le saut d'un processus de Poisson:

$$P(\tau > t) = e^{-\lambda t} \text{ ou } e^{-\int_0^t ds\, \lambda_s}$$

λ ou λ_s est l'intensité de défaut

$$P(\tau \in (t, t+dt)) = \lambda e^{-\lambda t}$$

- Prix incluant le risque de défaut:

$$E\left[e^{-\int_t^{T\wedge\tau} ds\, R_s} V_T 1_{\tau > T} + e^{-\int_t^{\tau} ds\, R_s} R V_\tau 1_{\tau < T} \middle| \mathcal{F}_t \right] =$$

$$= E\left[e^{-\int_t^{T\wedge\tau} ds\, R_s} \left(V_{T\wedge\tau} - V_\tau 1_{\tau > T} \right) + R e^{-\int_t^{\tau} ds\, R_s} V_\tau 1_{\tau < T} \middle| \mathcal{F}_t \right] =$$

$$= \underbrace{E\left[e^{-\int_t^{\tau\wedge T}} V_{T\wedge\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right]}_{\overset{\text{TH d'arrêt}}{\parallel}} - (1-R) E\left[e^{-\int_t^{\tau} ds\, R_s} V_\tau 1_{\tau < T} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

$$V_t \quad - \underbrace{(1-R) E\left[e^{-\int_t^{T} ds\, R_s} V_\tau 1_{\tau < T} \middle| \mathcal{F}_t \right]}_{\overset{\parallel}{CVA_t}}$$

prix sans risque - CVA

$$= \overbrace{V_t - CVA_t}$$

~~Notions de calcul~~ ④

~~Soit un contrat dérivé de sous-jacent S_t,~~

~~Soit V_t valeur du cont~~

$$CVA_t = E\left[e^{-\int_t^{\tau} ds\, r_s} V_\tau \mathbb{1}_{\tau < T} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

$$\approx E\left[\sum_{i=1}^{N} e^{-\int_t^{t_i} ds\, r_s} V_{t_i} \mathbb{1}_{\tau \in (t_i, t_i + dt)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} P_{t, t_i} E^{t_i}\left[V_{t_i} \right] \lambda e^{-\lambda t_i}$$

$$= \int_t^T du\, E\left[e^{-\int_t^u ds\, r_s} V_u \lambda_u e^{-\int_t^u ds\, \lambda_s} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$