Université de Paris 6 - Pierre et Marie Curie

Document de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches

Spécialité : Mathématiques

Présentée par Benjamin JOURDAIN

INTERPRÉTATION PROBABILISTE D'ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRES ET APPLICATIONS

Soutenue le 20 mars 2002 devant le jury composé de

Monsieur Jean BERTOIN
Monsieur Damien LAMBERTON
Monsieur Bernard LAPEYRE
Madame Sylvie MÉLÉARD
Monsieur Philip PROTTER, Rapporteur
Monsieur Bernard ROYNETTE, Rapporteur
Monsieur Denis TALAY
Monsieur Wojbor WOYCZYNSKI, Rapporteur

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Sylvie Méléard qui a guidé mes premiers pas dans la recherche. Elle m'a beaucoup appris et je trouve toujours son enthousiasme exemplaire.

Je remercie ensuite Bernard Roynette, Philip Protter et Wojbor Woyczynski d'avoir accepté de rapporter sur mes travaux.

Ma reconnaissance va aussi à Denis Talay : mes liens scientifiques avec le projet Omega ont toujours été un encouragement dans mon travail de recherche.

Je remercie également Jean Bertoin d'avoir accepté de faire partie de ce jury.
Cela fait plusieurs années que je côtoie Damien Lamberton lors des séances de groupes de travail à l'université de Marne-la-Vallée et à l'Ecole des Ponts : je suis très heureux qu'il participe au jury.

Je tiens à remercier tous ceux avec qui j'ai collaboré avec beaucoup de plaisir : Claude Martini, Mireille Bossy, Laurent Nguyen, Tony Lelièvre, Claude Le Bris, Bruno Sportisse, Edouard Debry. J'espère que nous aurons des échanges tout aussi fructueux dans le futur.

Je suis reconnaissant à Bernard Lapeyre de m'avoir accueilli dans l'équipe de probabilités du Cermics et d'avoir su créer une excellente ambiance de travail au sein de cette équipe. Je remercie également Jean-François Delmas, Emmanuel Temam, Alain Toubol et Mohamed Ben Alaya avec qui je prends toujours beaucoup de plaisir à discuter de mathématiques et d'autres sujets.
Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues du projet Mathfi et notamment à Agnès Sulem, Marie-Claire Quenez, Vlad Bally et Antonino Zanette.
C'est avec beaucoup de plaisir que je travaille au Cermics. J'en suis redevable à tous les membres du laboratoire et notamment aux secrétaires Sylvie Berte et Imane Hamade ainsi qu'à Jacques Daniel.

Je termine par une pensée pour tous mes proches et particulièrement Anne : ils sont toujours là pour m'épauler et me soutenir.

Table des matières

Introduction

Mes travaux de recherche ont essentiellement porté sur l'interprétation probabiliste d'équations d'évolution non linéaires dans le but de construire des méthodes numériques pour résoudre ces équations. Ma thèse [T] effectuée sous la direction de Sylvie Méléard, qui contient les articles [A1] [A2] [A3] [A4] et dont l'article [A5] est en partie tiré se concentre sur les équations de la forme $\partial_t u = \sum_{i,j} \partial^2_{ij}\alpha_{ij}(u) - \sum_i \partial_i\beta_i(u)$, auxquelles la première partie de cette synthèse est consacrée. Même si depuis, j'ai continué à travailler sur ces équations [A6] [A9] [A11] [A12] [C2] [A13], je me suis également intéressé à d'autres problèmes.

La seconde partie de cette synthèse trouve sa cohérence non pas dans le type d'équations traité mais dans le fait que ces équations modélisent le comportement de polymères.

La troisième partie est consacrée au problème issu des mathématiques financières du calcul du prix d'une option américaine. Comme fonction du cours du sous-jacent et de la durée jusqu'a l'échéance, cette fonction est solution d'une inéquation aux dérivées partielles, que l'on peut voir comme une équation d'évolution non linéaire.

Enfin, dans la quatrième partie, je fais le point sur mes activités d'encadrement et sur ma participation à des contrats industriels.

Première partie

Interprétation probabiliste et approximation particulaire pour des équations de la forme $\partial_t u = \sum_{i,j} \partial^2_{ij}\alpha_{ij}(u) - \sum_i \partial_i\beta_i(u)$

Les équations d'évolution non linéaires auxquelles je me suis intéressé s'écrivent de façon plus détaillée :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \sum_{i,j=1}^d \partial^2_{x_i x_j}\alpha_{ij}(u(t,x)) - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}\beta_i(u(t,x)),\ t>0,\ x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x), x\in\mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. Dans le cas dégénéré $\alpha \equiv 0$, (1) est une équation de conservation scalaire de type hyperbolique.

L'idée d'associer des processus de diffusion non linéaires à certaines équations d'évolution remonte à McKean [39]. Cet auteur est à l'origine de l'équation de McKean-Vlasov qui s'écrit :

$$\partial_t P_t = \sum_{i,j=1}^d \partial^2_{x_i x_j}(A_{ij}[x,P_t]P_t) - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(B_i[x,P_t]P_t) \tag{2}$$

où $\forall t \geq 0$, P_t est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et pour $\Sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ et $b : \mathbb{R}^d \times R^d \to \mathbb{R}^d$ lipschitziennes et bornées,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \text{ et } \forall \eta \text{ probabilité sur } \mathbb{R}^d,\ A[x,\eta] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \Sigma(x,y)\Sigma^*(x,z)\eta(dy)\eta(dz)$$

$$B[x,\eta] = \int_{\mathbb{R}^d} b(x,y)\eta(dy)$$

D'un point de vue probabiliste, l'équation (2) peut s'interpréter comme une équation de Fokker-Planck (ou Kolmogorov forward) non linéaire, car elle se met sous la forme

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = L^*(P_t)P_t$$

où pour η probabilité sur $\mathbb{R}^d$, $L^*(\eta)$ est l'adjoint formel de l'opérateur différentiel du second ordre $L(\eta)$ défini par

$$\forall \varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d),\ L(\eta)\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}[x,\eta]\partial^2_{x_i x_j}\varphi(x) + \sum_{i=1}^{d} B_i[x,\eta]\partial_{x_i}\varphi(x).$$

Pour construire sur $C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)$ une probabilité P qui fait du processus canonique $X_t, t \geq 0$ un processus de diffusion de générateur $L(P_t)$ dépendant du temps t au travers de la marginale $P_t = P \circ X_t^{-1}$ de P, l'outil naturel est un problème de martingales non linéaire. Une probabilité P sur $C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)$ est solution du problème **(PM)** issu de P_0 si $\forall \varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$

$$M_t^\varphi = \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t L(P_s)\varphi(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale.}$$

La constance de l'espérance de la martingale M_t^φ entraîne que si P est solution de (PM) alors $t \to P_t$ est solution faible de l'équation de Fokker-Planck (2) pour la condition initiale P_0.
On peut montrer par une technique de point fixe (voir Sznitman [55] p.172) l'existence et l'unicité trajectorielle et en loi pour l'équation différentielle stochastique qui est associée au problème **(PM)** :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t \Sigma[X_s,P_s]dW_s + \int_0^t B[X_s,P_s]ds \\ P \quad \text{est la loi de} \quad \text{X} \end{cases}$$

où W est un mouvement brownien d-dimensionnel. Du fait de la présence des marginales de la loi de la solution dans les coefficients Σ et B, il n'est pas possible de simuler directement la solution de cette équation différentielle stochastique par un schéma de discrétisation en temps du type schéma d'Euler. En revanche, si on se donne $(X_0^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables initiales I.I.D. suivant la loi P_0 et indépendamment $(W^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de mouvements browniens indépendants à valeurs $\mathbb{R}^d$, on peut simuler le système de n particules en interaction faible défini par l'équation différentielle stochastique :

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \Sigma[X_s^{i,n},\mu_s^n]dW_s^i + \int_0^t B[X_s^{i,n},\mu_s^n]ds,\ 1 \leq i \leq n \tag{3}$$

où la marginale P_s inconnue est remplacée par la mesure empirique à l'instant s : $\mu^n_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X^{i,n}_s}$. Le couplage ce système avec les processus indépendants de loi commune P :

$$X^i_t = X^i_0 + \int_0^t \Sigma[X^i_s, P_s]dW^i_s + \int_0^t B[X^i_s, P_s]ds$$

permet d'obtenir l'estimation trajectorielle

$$\forall T > 0,\ \sup_n \sqrt{n}\mathbb{E}(\sup_{t\leq T} |X^i_t - X^{i,n}_t|) < +\infty$$

(voir [55]). En conséquence, pour tout sous-système fixé $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, la loi de $(X^{i_1,n}, \ldots, X^{i_k,n})$ converge étroitement vers $P^{\otimes k}$ lorsque $n \to +\infty$. D'un point de vue heuristique, on peut voir ce résultat de la façon suivante : $\varphi(X^{i_1,n}_t) - \varphi(X^{i_1}_0) - \int_0^t L(\mu^n_s)\varphi(X^{i_1,n}_s)ds$ est une martingale et dans le passage à la limite, la mesure empirique d'un nombre croissant de particules de même loi que $X^{i_1,n}_s$ s'approche de cette loi en dépit de l'absence d'indépendance. Ainsi la loi de $X^{i_1,n}$ converge vers la solution P du problème **(PM)**. En outre, l'influence sur cette particule des particules d'indices $i_2, \ldots, i_k$ devient négligeable du fait du facteur de normalisation $1/n$ dans la définition de la mesure empirique. L'indépendance à l'instant initial des variables $X^{i_1}_0, X^{i_2}_0, \ldots, X^{i_k}_0$ se transmet aux instants ultérieurs et les processus $X^{i_1,n}, X^{i_2,n}, \ldots, X^{i_k,n}$ convergent en loi vers des processus indépendants. Ce phénomène appelé propagation du chaos est équivalent à la convergence en probabilité des mesures empiriques μ^n (considérées comme des variables aléatoires à valeurs dans les probabilités sur $C([0,+\infty), \mathbb{R}^d)$) vers P. Tout l'intérêt de la démarche réside dans cette convergence : on peut approcher la solution de l'équation de McKean-Vlasov à l'aide de la mesure empirique du système de n particules.

Il y a une différence importante entre l'équation (1) et l'équation de McKean-Vlasov (2) : dans la première, la non-linéarité est locale au contraire de la seconde où les coefficients $A[x, \eta]$ et $B[x, \eta]$ s'expriment comme des intégrales par rapport à la mesure η. Le caractère local rend l'interprétation probabiliste beaucoup plus délicate : seule une fonction peut être solution faible de l'équation (1). Je me suis intéréssé à trois approches qui permettent de surmonter cette difficulté.
La première approche est la plus naturelle : elle consiste à construire une probabilité P sur l'espace $C([0,+\infty), \mathbb{R}^d)$ telle que $\forall t > 0,\ P_t = p(t,x)dx$ et la fonction $p(t,x)$ est solution faible de (1).
La seconde approche qui portera le nom d'approche gradient dans la suite consiste à dériver l'équation (1) par rapport à chacune des coordonnées spatiales $x_i,\ 1 \leq i \leq d$. De cette façon on obtient un système d'équations qui présente une non-linéarité non-locale. C'est à ce système "gradient" que l'on associe d mesures de probabilité sur $C([0,+\infty), \mathbb{R}^d)$.
Enfin la troisième approche repose sur l'introduction d'une équation de type cinétique qui permet d'approcher la solution entropique de l'équation de conservation scalaire obtenue en fixant $\alpha \equiv 0$ dans (1). Cette équation cinétique s'interprète comme une équation de Fokker-Planck non linéaire.

1 Approche directe

Cette approche est possible lorsque $\alpha(u) = a(u)u$ avec $a(u)$ matrice symétrique positive et $\beta(u) = b(u)u$. L'équation (1) s'écrit alors

$$\partial_t u = \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_i x_j}(a_{ij}(u)u) - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}(b_i(u)u) = L_d^*(u)u \tag{4}$$

où pour $y \in \mathbb{R}$, $L_d^*(y)$ est l'adjoint de l'opérateur différentiel du second ordre $L_d(y)$ défini par

$$\forall \varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d),\ L_d(y)\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(y)\partial^2_{x_i x_j}\varphi(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(y)\partial_{x_i}\varphi(x).$$

On associe à cette équation de Fokker-Planck non linéaire le problème de martingales suivant : on dit qu'une probabilité P sur $C([0,+\infty),\mathbb{R})$ telle que $\forall t > 0$, $P_t = p(t,x)dx$ est solution du problème **(PMd)** issu de P_0 si $\forall \varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$,

$$M_t^\varphi = \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t L_d(p(s,X_s))\varphi(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale.}$$

Si P est solution de **(PMd)**, la fonction p est solution faible de (4) pour la condition initiale P_0.
Le caractère local de la dépendance en P des coefficients du problème de martingales **(PMd)** pose problème pour définir des systèmes de particules en interaction analogues à (3). La solution introduite par Oelschläger [43] consiste à convoler la mesure empirique μ^n avec une approximation de l'identité $V^n(x) = V^1(x/\epsilon_n)/\epsilon_n^d$ où V^1 est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ régulière et $(\epsilon_n)_n$ une suite de nombres strictement positifs qui converge vers 0. Pour σ t.q. $\sigma\sigma^* = 2a$, on obtient alors le système de particules en interaction modérée :

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \sigma(V^n * \mu_s^n(X_s^{i,n}))dW_s^i + \int_0^t b(V^n * \mu_s^n(X_s^{i,n}))ds,\ 1 \le i \le n. \tag{5}$$

Pour montrer un résultat de propagation de chaos analogue à celui du modèle de McKean-Vlasov, il faut réussir à contrôler le terme $V^n * \mu^n$, malgré l'explosion de l'approximation de l'identité V^n en 0 pour $n \to +\infty$.

L'approche tout juste décrite n'est pas nouvelle : de nombreux auteurs ont étudié le problème **(PMd)** ou son équivalent en termes d'équation différentielle stochastique notamment dans le cas particulier de l'équation de Burgers visqueuse ($d = 1$, $\alpha(u) = u/2$, $\beta(u) = u^2/2$) (Calderoni et Pulvirenti [18], Sznitman [54], Oelschläger [43]), mais aussi dans le cas de généralisations de cette équation (Roynette et Vallois [48]) ou dans celui de l'équation des milieux poreux ($d = 1$, $\beta \equiv 0$, $\alpha(u) = u^q$, $q > 1$) (Inoue [29] [30], Benachour, Chassaing, Roynette et Vallois [9]). En ce qui concerne les résultats de propagation du chaos pour des systèmes de particules en interaction modérée du type (5), on peut mentionner les travaux de Calderoni et Pulvirenti [18], d'Oelshläger [43] et de Méléard et Roelly [42].

Dans [A4], avec Sylvie Méléard, nous nous intéressons au cas régulier, où P_0 possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue $p(0,x)$ régulière, σ est une application régulière et uniformément elliptique de $\mathbb{R}$ dans les matrices $d \times d$ symétriques positives et b une application régulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$. Nous montrons que l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(p(s,X_s))dW_s + \int_0^t b(p(s,X_s))ds \\ p \in C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}) \text{ est telle que la loi de } X_t \text{ est } p(t,x)dx \end{cases}$$

possède alors une unique solution. La loi P de cette solution satisfait le problème (**PMd**) issu de $p(0,x)dx$. En couplant le système de particules (5) avec les processus non linéaires indépendants de loi P :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \sigma(p(s,X_s^i))dW_s^i + \int_0^t b(p(s,X_s^i))ds,$$

nous montrons que si ϵ_n converge vers 0 suffisamment lentement,

$$\forall T > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\sup_{t\leq T} |X_t^i - X_t^{i,n}|^2) = 0.$$

Cette estimation qui implique la propagation du chaos constitue, à notre connaissance, le premier résultat de convergence pour un système de particules avec interaction modérée dans le coefficient de diffusion.
Dans le cas de la dimension $d = 1$, nous étudions la vitesse de convergence de la mesure empirique μ^n vers P. Nous obtenons que pour une suite $c_n \to +\infty$ bien choisie, les fluctuations $c_n(\mu_n - P)$ considérées comme des processus à valeurs dans un espace de Sobolev à poids convergent dans L^1 vers un processus déterministe. La vitesse de convergence c_n est beaucoup plus lente que celle obtenue dans le cadre du modèle de McKean-Vlasov où $\sqrt{n}(\mu_n - P)$ converge vers un processus non pas détermiste mais gaussien.

Dans [A3], je m'interesse en dimension $d = 1$ à un cas particulier beaucoup moins régulier dans la mesure où la condition initiale P_0 est égale à δ_0, la masse de Dirac en 0. En revanche les coefficients $\alpha(u) = u/2$ et $\beta(u) = u|u|^{q-1}/q$ avec $q \geq 2$ demeurent réguliers. Escobedo, Vasquez et Zuazua [25] ont montré que l'équation correspondante

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u - |u|^{q-1}\partial_x u, \; u(t,.) \to_{t\to 0} \delta_0$$

admet une unique solution u positive régulière sur $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$. D'après Roynette et Vallois [48], $\forall t > 0$, $\|u(t,.)\|_{L^\infty} \leq k/(t \wedge 1)^{\frac{1}{q}}$. Cette majoration donne l'idée de modifier le problème **(PMd)** en introduisant une fonction $\tilde{b}(t,v)$ telle que $\tilde{b}(t,u(t,x)) = u(t,x)^{q-1}/q$ et que $t \to \|\tilde{b}(t,.)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ est intégrable en 0. Je montre ainsi l'existence d'une unique probabilité P sur $C([0,+\infty),\mathbb{R})$ telle que $P_0 = \delta_0$, $\forall t > 0, P_t = p(t,x)dx$ et $\forall \varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$,

$$M_t^\varphi = \varphi(X_t) - \varphi(0) - \int_0^t \frac{1}{2}\varphi''(X_s) + \tilde{b}(s,p(s,X_s))\varphi'(X_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale.}$$

Cette probabilité fournit une représentation probabiliste de la solution u au sens où $\forall (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \; p(t,x) = u(t,x)$.
En utilisant des résultats d'Oelschläger [43], j'obtiens ensuite un résultat de propagation du chaos vers P pour le système de particules défini comme (5) avec $\sigma \equiv 1$, $b(.)$ remplacée par $\tilde{b}(s,.)$ et $\epsilon_n = 1/n^\gamma, \; 0 < \gamma < 1$. Toute la difficulté dans l'étude de ce modèle est liée à l'explosion de $t \to \|\tilde{b}(t,.)\|_{L^\infty}$ pour $t \to 0$.

2 Approche de type gradient

Cette approche a été introduite par Bossy et Talay [14] [15] en dimension d'espace $d = 1$ dans le cas particulier de l'équation de Burgers visqueuse : $\partial_t u = \nu \partial_{xx} u - \partial_x(u^2/2),\ \nu > 0$. Elle est envisageable lorsque les coefficients $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ sont des fonctions C^1 et que pour tout u réel $\alpha'(u)$ est une matrice symétrique positive. Son intérêt repose sur la constatation suivante : en dérivant par rapport à chacune des variables d'espace l'équation (1) qui présente une non-linéarité locale, on obtient un système qui présente une non-linéarité non-locale plus facile à traiter par les probabilités.
Par dérivation de (1), on obtient que pour $1 \leq i \leq d$, $v_i = \partial_{x_i} u$ est solution de

$$\partial_t v_i = \sum_{j,k=1}^{d} \partial^2_{x_j x_k} \left(\alpha'_{jk}(u) v_i\right) - \sum_{j=1}^{d} \left(\beta'_j(u) v_i\right) \qquad v_i(0,x) = \partial_{x_i} u_0(x).$$

Pour obtenir un système fermé en $(v_1, \ldots, v_d)$, il faut exprimer u en fonction de son gradient.
En dimension $d = 1$, il suffit d'intégrer la dérivée v pour retrouver u : $u(t,x) = c + \int_{-\infty}^{x} v(t,y)dy$, ce que l'on peut aussi écrire à l'aide de la fonction de Heaviside $H(y) = 1_{\{y\geq 0\}}$: $u(t,x) = c + (H * v(t,.))(x)$. Ainsi l'équation au gradient devient :

$$\partial_t u = \partial_{xx}(\alpha'(c + H * v)v) - \partial_x(\beta'(c + H * v)v).$$

En dimension $d \geq 2$, exprimer u en fonction de son gradient semble moins évident. Anderson [2] a proposé le premier d'utiliser la solution fondamentale du Laplacien $\gamma(x)$ à cet effet dans un contexte de méthode particulaire (voir également [26] [49]). Lorsque $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ égale à une constante c en dehors d'un compact, alors $f = c + \gamma * \Delta f$. Par intégration par parties, on obtient $f = c + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\gamma * \partial_{x_i} f = c + \nabla\gamma * \nabla f$. Cette formule est en fait une généralisation de celle utilisée en dimension $d = 1$ où la dérivée de la solution fondamentale du Laplacien est $H - 1/2$. Au moins formellement, on associe à (1) le système

$$\begin{cases} \partial_t v_i = \sum_{j,k=1}^{d} \partial^2_{x_j x_k} \left(\alpha'_{jk}(c + \nabla\gamma * v) v_i\right) - \sum_{j=1}^{d} \left(\beta'_j(c + \nabla\gamma * v) v_i\right) \\ v_i(0,x) = \partial_{x_i} u_0(x) \end{cases} ,1 \leq i \leq d.$$

Après avoir exploré cette démarche gradient en dimension $d = 1$, en exploitant notamment la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$, j'aborderai le cas de la dimension $d \geq 2$ sur l'exemple traité dans [A9]. La discontinuité de la fonction de Heaviside H en 0 et la singularité du noyau $\nabla\gamma$ à l'origine en dimension $d \geq 2$ constituent les principales difficultés introduites par rapport au cas de l'équation de McKean-Vlasov.

2.1 Dimension 1 d'espace

Dans le cas de la dimension 1, l'équation (1), s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial^2_{xx}\alpha(u(t,x)) - \partial_x\beta(u(t,x)),\ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{6}$$

On suppose que la condition initiale $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction non constante à variation bornée i.e. que $u_0(x) = c + \int_{-\infty}^{x} m(dy)$ pour m une mesure signée bornée non nulle. Quitte à modifier les fonctions α et β sans changer leur régularité, on se ramène à supposer que $c = 0$, que la masse totale de la mesure m est $\|m\| = 1$ et que m est une mesure de probabilité dans le cas où u_0 est monotone. L'équation au gradient s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t v = \partial^2_{xx}(\alpha'(H * v)v) - \partial_x(\beta'(H * v)v), \ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ v(0,x) = m \end{cases} \tag{7}$$

où $H * v(t,x)$ désigne la convolution spatiale de la fonction $v(t,.)$ avec la fonction de Heaviside $H(y) = 1_{\{y \geq 0\}}$ calculée au point x.

Même si mes travaux ont plus particulièrement porté sur l'équation de conservation $\partial_t u = \nu \partial^2_{xx} u - \partial_x \beta(u)$ avec ($\nu > 0$) ou sans ($\nu = 0$) viscosité [A1] [A5] [A11] [A12] [C2] et sur l'équation des milieux poreux $\partial_t u = \partial^2_{xx} u^q$ où $q > 1$ [A6], certains des résultats obtenus dans ces deux cas particuliers sont valables plus généralement. La présentation qui suit traite donc du cas général et ne devient spécifique à l'équation de conservation scalaire ou à l'équation des milieux poreux que si nécessaire.
En raison de sa simplicité et de sa spécificité, le cas où u_0 est monotone (m probabilité sur $\mathbb{R}$) sera traité avant le cas général.

2.1.1 donnée initiale monotone

On suppose que les fonctions $\alpha, \beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sont C^1. On se place d'abord dans la situation où $\forall u > 0, \ \alpha'(u) > 0$ qui englobe à la fois l'équation de conservation scalaire visqueuse et l'équation des milieux poreux, avant de considérer le cas dégénéré de l'équation de conservation scalaire non visqueuse : $\alpha \equiv 0$.

<u>Cas où $\forall u > 0, \ \alpha'(u) > 0$</u>
L'équation (7) s'écrit comme équation de Fokker-Planck non linéaire $\partial_t v = L^*_g(v)v$ pour l'opérateur $L_g(\eta)\varphi(x) = \alpha'(H * \eta(x))\varphi''(x) + \beta'(H * \eta(x))\varphi'(x), \ x \in \mathbb{R}, \ \eta \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On lui associe donc le problème de martingales suivant : une probabilité $P \in \mathcal{P}(C([0,+\infty), \mathbb{R}))$ de marginales en temps $(P_t)_{t \geq 0}$ est solution du problème **(PMg)** issu de m si

1. $P_0 = m$
2. dt p.p. la marginale P_t ne charge pas les points de $\mathbb{R}$
3. $\forall \varphi \in C^2_b(\mathbb{R}), \ M^\varphi_t = \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t \alpha'(H * P_s(X_s))\varphi''(X_s) + \beta'(H * P_s(X_s))\varphi'(X_s)ds$ est une P-martingale.

Lorsque P est solution de ce problème, il est facile de déduire de la constance en temps de l'espérance de M^φ_t que $t \to P_t$ est solution faible de l'équation (7). Pour conclure que $(t,x) \to H * P_t(x)$ est solution faible de l'équation de départ (6), il suffit que les dérivées spatiales au premier ordre de $\alpha(H * P_t(x))$ et $\beta(H * P_t(x))$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ soient respectivement égales à $\alpha'(H * P_t)P_t$ et $\beta'(H * P_t)P_t$. La condition 2. dans la définition de **(PMg)** assure cela.

En dehors du cas de l'équation de conservation scalaire visqueuse $\alpha(u) = \nu\, u$ où $\nu > 0$ et $\beta(u)$ fonction C^2, où l'existence et l'unicité pour le problème **(PMg)** découle d'un résultat portant sur une classe plus générale de problèmes de martingales prouvé dans [A1] par une technique de point fixe, l'obtention d'un résultat d'unicité pour **(PMg)** repose en général sur un résultat d'unicité des solutions faibles de (6) de la forme $H * P_t(x)$ où $P \in \mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$. Si ce dernier résultat est vrai, d'après l'exercice 7.3.2 de Stroock et Varadhan [53], il suffit que $\alpha'(0) > 0$ pour qu'il y ait unicité pour **(PMg)**. On en déduit par exemple l'unicité pour le problème **(PMg)** associé à l'équation de conservation scalaire visqueuse sous l'hypothèse plus faible $\beta(u)$ fonction C^1. Mais dans le cas de l'équation des milieux poreux, $\alpha(u) = u^q$ où $q > 1$ et donc $\alpha'(0) = 0$. Le résultat d'unicité pour le problème **(PMg)** correspondant que j'obtiens dans [A6] repose sur la régularité spatiale de la solution de cette équation prouvée par Aronson et Caffarelli [3].

Par analogie avec le cas de l'équation de McKean-Vlasov, on définit le système de n particules en interaction comme l'unique solution faible de l'équation différentielle stochastique

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \sqrt{2\alpha'}(H * \mu_s^n(X_s^{i,n})dW_s^i + \int_0^t \beta'(H * \mu_s^n(X_s^{i,n}))ds,\ 1 \leq i \leq n \qquad (8)$$

où $\mu_s^n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{X_s^{i,n}}$ et les variables initiales $X_0^1, \ldots, X_0^n$ sont I.I.D. de loi m et indépendantes du mouvement brownien n-dimensionnel $(W^1, \ldots, W^n)$. L'existence découle de [53]. Comme la matrice de diffusion est constante sur les polyhèdres $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \ldots < x_{\sigma(n)}\}$ indexés par les permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$, l'unicité en loi est une conséquence de résultats de Bass et Pardoux [7].
L'unicité en loi assure que les processus $X^{i,n}, 1 \leq i \leq n$ sont échangeables. Avec le caractère C^1 des fonctions α et β, on vérifie facilement la tension de la suite des lois π^n des mesures empiriques μ^n considérées comme des variables aléatoires à valeurs $\mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$. Dans [A6], je montre que toute limite π^∞ de la suite π^n est concentrée sur les $Q \in \mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$ t.q. $H * Q_t(x)$ est solution faible de l'équation (6). Lorsque cette équation admet une unique solution faible $u(t,x)$, ce qui est le cas pour l'équation de conservation scalaire visqueuse et pour l'équation des milieux poreux, on en déduit (voir [A11]) que

$$\forall T > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(t,x) - H * \mu_t^n(x)|}{1+x^2} dx = 0.$$

Ainsi la fonction de répartition empirique $H * \mu_t^n(.)$ du système de particules converge vers $u(t,x)$. En outre, dans ce cas, toute limite π^∞ de la suite π^n est concentrée sur les probabilités Q dont les marginales en temps sont déterminées par $Q_t = \partial_x u(t,.)$.

L'étape suivante consiste à montrer que toute limite π^∞ de la suite π^n est concentrée sur les solutions du problème de martingales **(PMg)** issu de m, ce qui, en cas d'unicité pour ce problème, établit la propagation du chaos. Du fait de l'initialisation des particules, π^∞ presque sûrement le point 1. de la définition de **(PMg)** est vérifié. D'après [A6], les fonctionnelles définies sur $\mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$ que l'on introduit naturellement pour vérifier le point 3. sont continues en toute probabilité Q telle que dt p.p. Q_t ne charge pas les points. Il suffit donc de montrer que π^∞ presque sûrement le point 2. est vérifié pour conclure. Dans le cas de l'équation de conservation scalaire visqueuse [A1] [A5], on peut obtenir ce résultat directement en effectuant des estimations sur le système de particules grâce au théorème de Girsanov. Il y a une alternative à cette approche directe lorsque les solutions faibles de (6) sont continues sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. En effet, comme π^∞ ne charge que les $Q \in \mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$ t.q. $H * Q_t(x)$ est solution faible de cette équation, on en déduit que π^∞ presque sûrement, pour tout $t > 0$, Q_t ne charge pas les points. C'est en utilisant ainsi le résultat de régularité de [3], que j'obtiens la propagation du chaos dans le cas de l'équation des milieux poreux [A6].

On peut également s'intéresser au comportement asymptotique du système réordonné $(Y^{1,n},\ldots,Y^{n,n})$ défini de la manière suivante : pour tout $t\geq 0$, $Y_t^{1,n}\leq Y_t^{2,n}\leq\ldots\leq Y_t^{n,n}$ est la statistique d'ordre de $(X_t^{1,n},\ldots,X_t^{n,n})$. Dans [A6], je montre que $(Y^{1,n},\ldots,Y^{n,n})$ est une diffusion de matrice de diffusion diagonale $diag(\alpha'(1/n),\alpha'(2/n),\ldots,\alpha'(n/n))$ et de vecteur dérive $(\beta'(1/n),\beta'(2/n),\ldots,\beta'(n/n))$ normalement réfléchie à la frontière du convexe $\{y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n:\ y_1\leq y_2\leq\ldots\leq y_n\}$. Ce résultat généralise celui énoncé par Sznitman [55] dans le cas très simple où les $X^{i,n},1\leq i\leq n$ sont des mouvements browniens indépendants.
La tension de la suite des lois $\bar\pi^n$ des mesures empiriques $\bar\mu^n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\delta_{Y^{i,n}}$ s'obtient facilement [A6]. Même si en général $\bar\mu^n\neq\mu^n$, l'égalité $\bar\mu_t^n=\mu_t^n$ est bien sûr vérifiée pour tout $t\geq 0$. Donc tout point limite $\bar\pi^\infty$ de la suite $\bar\pi^n$ est aussi concentré sur les $Q\in\mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$ t.q. $H*Q_t(x)$ est solution faible de (6). Le caractère réordonné du système $(Y^{1,n},\ldots,Y^{n,n})$ permet de vérifier qu'également $\bar\pi^\infty$ est concentré sur les probabilités Q dont les marginales fini-dimensionnelles $Q_{t_1,\ldots,t_n}$ sont égales à l'image de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ par $y\to((H*Q_{t_1})^{-1}(y),\ldots,(H*Q_{t_n})^{-1}(y))$ où pour tout $t\geq 0$, $(H*Q_t)^{-1}(y)=\inf\{x:H*Q_t(x)\geq y\}$ désigne le pseudo-inverse continu à gauche de la fonction de répartition de Q_t (voir [A11]). Lorsqu'il y a unicité des solutions faibles de (6), il existe une unique probabilité $\bar P\in\mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$ qui vérifie ces deux propriétés et toute la suite $\bar\pi^n$ converge étroitement vers $\delta_{\bar P}$. Si en outre, la solution faible $u(t,x)$ de (6) est continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, ce qui est le cas à la fois pour l'équation de conservation scalaire visqueuse et pour l'équation des milieux poreux, la seconde propriété qui caractérise $\bar P$ est équivalente à la constance de la solution u de (6) le long des trajectoires chargées par $\bar P$ [A6].

Avec Mireille Bossy, nous cherchons dans [C2] [A12] à adapter l'approche tout juste décrite au cas où le domaine spatial dans lequel l'équation (6) est posée n'est plus $\mathbb{R}$. Nous nous intéressons plus précisément à l'équation de conservation scalaire visqueuse :

$$\begin{cases}\partial_t u(t,x)=\nu\partial^2_{xx}u(t,x)-\partial_x\beta(u(t,x)),\ (t,x)\in]0,+\infty[\times]0,1[\\ u(0,x)=u_0(x),\ x\in]0,1[\\ u(t,0)=0 \text{ et } u(t,1)=1,\ t\geq 0\end{cases}\tag{9}$$

dans le cas où la condition initiale u_0 est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité m sur $[0,1]$. Lorsque $\beta(u)=u^2/2$, (9) est l'équation de Burgers qui peut se voir comme un analogue en dimension 1 d'espace de l'équation de Navier-Stokes. Notre travail est motivé par le souhait de tester sur ce modèle très simple des idées préparant l'étude ultérieure d'une méthode particulaire probabiliste pour l'équation de Navier-Stokes incompressible posée dans un domaine de $\mathbb{R}^2$.
Nous associons à cette équation un problème de martingales non linéaire analogue à **(PMg)** mais portant sur un espace de trajectoires continues réfléchies en 0 et en 1. Après avoir déduit de l'unicité des solutions faibles de (9) un résultat d'unicité pour le problème de martingales, nous obtenons l'existence pour ce problème en démontrant un résultat de propagation du chaos. A l'intérieur de l'intervalle $]0,1[$, les particules évoluent comme dans (8) avec $\alpha'\equiv\nu$; en 0 et en 1, elles sont réfléchies. Nous étudions ensuite la procédure numérique obtenue en discrétisant en temps avec un pas Δt l'équation différentielle stochastique réfléchie qui correspond à cette dynamique. Nous utilisons pour cela la version

du schéma d'Euler introduite par Lépingle [37].
Pour appliquer ce schéma à une diffusion uni-dimensionnelle normalement réfléchie en 0 et en 1, on se donne deux constantes $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1$ de façon à séparer l'intervalle $[0,1]$ en trois zones. Comme dans un schéma d'Euler classique, les coefficients de diffusion et de dérive sont figés sur chaque pas de temps. Si la position au début d'un pas de temps est dans $]\alpha_0, \alpha_1[$, on se contente de simuler la position de la diffusion à coefficients figés à la fin du pas de temps et on la projette sur $[0,1]$ pour obtenir la position au début du pas de temps suivant. Si la position au début du pas de temps est dans $[\alpha_1, 1]$, on tire parti de la connaissance de la loi du supremum du mouvement brownien avec dérive constante pour simuler exactement la position à la fin du pas de temps de la diffusion à coefficients figés réfléchie en 1. On ramène ensuite cette position à 0 si elle se trouve au-dessous. Lorsque la position initiale est dans $[0, \alpha_0]$, on procède de façon symétrique. Nous établissons que lorsque le coefficient de diffusion est une constante non nulle, la vitesse faible du schéma d'Euler Lépingle est la même que celle du schéma d'Euler classique dans tout l'espace.
Ce résultat intermédiaire intervient dans l'obtention de la vitesse de convergence vers la solution $u(k\Delta t, x)$ de (9) de la fonction de répartition empirique $U^n(k\Delta t, x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n H(x - \bar{X}^{i,n}_{k\Delta t})$ du système discrétisé $\bar{X}^{1,n}_{k\Delta t}, \ldots, \bar{X}^{n,n}_{k\Delta t}$ à l'instant $k\Delta t$. Pour $T > 0$, nous majorons l'erreur $\sup_{x\in[0,1],\, k\leq T/\Delta t} \mathbb{E}|U^n(k\Delta t, x) - u(k\Delta t, x)|$ par $\mathcal{O}(\Delta t + \frac{1}{\sqrt{n}})$. Nous retrouvons ainsi la vitesse de convergence obtenue antérieurement par Mireille Bossy [12] dans le cas de l'équation de conservation scalaire visqueuse posée dans tout l'espace et par Kohatsu-Higa et Ogawa [34] dans le cas de l'équation de McKean-Vlasov. Nous confirmons cette vitesse par une expérience numérique. Nous observons également que lorsque le système de particules est discrétisé par le schéma d'Euler avec projection qui traite simplement la réflexion par projection sur $[0,1]$, la vitesse de convergence en le pas de temps est clairement moins bonne.

Equation de conservation scalaire non visqueuse : $\alpha \equiv 0$
Il n'y a pas unicité pour les solutions faibles de cette équation qui s'écrit

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x \beta(u(t,x)) = 0,\ (t,x) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}. \tag{10}$$

Mais d'après le théorème de Kruzkhov, elle admet une unique solution entropique caractérisée par les inégalités au sens des distributions

$$\partial_t |u(t,x) - c| + \partial_x \Big(\text{signe}(u(t,x) - c)(\beta(u(t,x) - \beta(c)) \Big) \leq 0$$

pour toute constante réelle c. Du fait de l'absence de dérivée du second ordre en espace, il ne semble pas possible de lui associer un problème de martingales analogue à **(PMg)**. En revanche, comme la solution entropique s'obtient comme limite lorsque la viscosité ν tend vers 0 de la solution de l'équation de conservation scalaire avec viscosité $\nu > 0$, on peut envisager d'approcher cette solution par la fonction de répartition empirique du système

$$X^{i,n}_t = X^i_0 + \sqrt{2\nu_n}\, W^i_t + \int_0^t \beta'(H * \mu^n_s(X^{i,n}_s))ds,\ 1 \leq i \leq n$$

où la viscosité ν_n introduite est positive mais faible. Les expériences numériques menées par Bossy et Talay [15] et Bossy, Piperno et Fezoui [13] montrent le bon comportement de cette approximation.

Le système de particules réordonné $(Y^{1,n},\dots,Y^{n,n})$ s'avère très utile dans l'étude théorique du comportement symptotique de la fonction de répartition empirique $H*\mu_t^n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n H(x-X_t^{i,n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n H(x-Y_t^{i,n})$ dans le passage à la limite $n\to+\infty$ avec $\nu_n\to 0$. En effet la dérivée au sens des distributions de la fonction $x\to|H*\mu_t^n(x)-c|$ qui apparaît lorsque l'on veut passer à la limite dans les inégalités entropiques est égale à $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \text{signe}(i-cn)\delta_{Y_t^{i,n}}$. Elle s'exprime donc comme combinaison linéaire à coefficients constants en temps des masses de dirac aux points $Y_t^{i,n}$ alors qu'elle ne s'écrit pas de façon aussi agréable en terme des $X_t^{i,n}$. Dans [A11], en exploitant cette remarque, je montre que

$$\forall T>0,\ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}}\frac{|u(t,x)-H*\mu_t^n(x)|}{1+x^2}dx=0$$

où u est la solution entropique de (10). C'est la contribution du terme de réflexion à la frontière de $\{y\in\mathbb{R}^n,\ y_1\le y_2\le\ldots\le y_m\}$ dans la dynamique du système réordonné qui permet d'obtenir le bon signe dans les inégalités entropiques.
Il semble délicat d'obtenir un résultat de propagation du chaos pour $(X^{1,n},\dots,X^{n,n})$. En revanche, toujours dans [A11], je prouve que les mesures empiriques du système réordonné convergent en probabilité vers l'unique $\bar P\in\mathcal{P}(C([0,+\infty),\mathbb{R}))$ dont les marginales fini-dimensionnelles $\bar P_{t_1,\dots,t_n}$ sont égales à l'image de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ par $y\to((H*\bar P_{t_1})^{-1}(y),\dots,(H*\bar P_{t_n})^{-1}(y))$ et telle que $\forall(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\ H*\bar P_t(x)=u(t,x)$. Même si cela n'est pas tout à fait exact à cause des possibles discontinuités de la fonction $u(t,x)$, on peut voir $\bar P$ comme une probabilité concentrée sur les "courbes caractéristiques" le long desquelles cette solution est constante.

S'il est nécessaire d'introduire une viscosité $\nu_n>0$ pour définir le système $(X^{1,n},\dots,X^{n,n})$, l'équation différentielle stochastique réfléchie à coefficients constants satisfaite par le système réordonné admet une unique solution même pour $\nu_n=0$. Les n composantes de cette solution évoluent alors suivant la dynamique des particules collantes de Zeldovich : la ième particule se déplace avec la vitesse initiale $\beta'(i/n)$ jusqu'à l'instant de sa première collision avec une autre particule ; lors des collisions les particules se collent formant des amas qui évoluent ultérieurement à une vitesse égale à la moyenne des vitesses initiales des particules qui les composent. La convergence de la fonction de répartition empirique de ce système vers $u(t,x)$ a été montrée par Brenier et Grenier [16]. L'approche développée dans [A11] permet de retrouver ce résultat.

2.1.2 donnée initiale générale

Les fonctions α et β sont supposées C^1 avec, dans un premier temps, $\forall u\in\mathbb{R},\ \alpha'(u)>0$. La condition initiale m de l'équation au gradient (7) est une mesure signée bornée de masse totale 1. Dans [A5], je propose d'associer un unique problème de martingales à une équation de type Fokker-Planck non linéaire dont la condition initiale est une mesure signée. Cette approche permet d'utiliser ensuite le cadre de la propagation du chaos développé notamment dans [55] pour montrer la convergence d'approximations particulaires vers la solution de l'équation non linéaire. Présentée dans l'introduction de [A5] sur l'exemple de l'équation de McKean-Vlasov, elle est de portée générale : elle est utilisée dans [A9] pour traiter l'équation de conservation scalaire visqueuse en dimension d'espace $d\ge 2$ (voir le paragraphe 2.2) mais aussi par Sylvie Méléard [40] [41] pour traiter la formulation tourbillon de l'équation de Navier-Stokes incompressible en dimension $d = 2$. Dans le cas particulier de (7), elle se traduit de la façon suivante : on introduit h une densité à valeurs $\{-1, 1\}$ de m par rapport à sa valeur absolue $|m|$ qui est une probabilité sur $\mathbb{R}$. A toute probabilité Q sur $C([0, +\infty), \mathbb{R})$ on associe la mesure signée $\tilde{Q}$ de densité $h(X_0)$ par rapport à Q. Les marginales en temps de $\tilde{Q}$ sont notées $(\tilde{Q}_s)_{s\geq 0}$. Je définis le problème de martingales non linéaire **(PMg)** issu de m de la façon suivante : $P \in \mathcal{P}(C([0, +\infty), \mathbb{R}))$ est solution si

1. $P_0 = |m|$
2. dt p.p. $\tilde{P}_t$ ne charge pas les points de $\mathbb{R}$
3. $\forall \varphi \in C_b^2(\mathbb{R}),\ M_t^\varphi = \varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t \alpha'(H * \tilde{P}_s(X_s))\varphi''(X_s) + \beta'(H * \tilde{P}_s(X_s))\varphi'(X_s)ds$ est une P-martingale.

Lorsque P est solution de ce problème, $h(X_0)M_t^\varphi$ est une P-martingale. En écrivant la constance de l'espérance de cette martingale, on vérifie que $t \to \tilde{P}_t$ est solution faible de l'équation (7). Grâce au point 2., on en déduit que $(t, x) \to H * \tilde{P}_t(x)$ est solution faible de (6). Du fait de la non-dégénerescence de α', en cas d'unicité pour les solutions faibles de (6), ce qui est vrai pour l'équation de conservation scalaire visqueuse, il y a unicité pour le problème **(PMg)**.

Le système de particules naturellement associé est défini par :

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \sqrt{2\alpha'}(H * \tilde{\mu}_s^n(X_s^{i,n})dW_s^i + \int_0^t \beta'(H * \tilde{\mu}_s^n(X_s^{i,n}))ds,\ 1 \leq i \leq n. \tag{11}$$

La i-ème particule est affectée du poids $h(X_0^i) \in \{-1, 1\}$ dans sa contribution à la mesure empirique signée : $\tilde{\mu}_s^n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n h(X_0^i)\delta_{X_s^{i,n}}$. Du fait de la possible irrégularité de la densité h, le choix de variables initiales $X_0^i,\ 1 \leq i \leq n$ I.I.D. suivant la probabilité $|m|$ est crucial pour la validité des résultats de convergence qui suivent. Il y a toujours existence d'une unique solution faible pour cette équation différentielle stochastique et tension de la suite π^n des lois des mesures empiriques $\mu^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X^{i,n}}$. Par une adaptation facile de [A11], toute limite π^∞ de la suite π^n est concentrée sur les $Q \in \mathcal{P}(C([0, +\infty), \mathbb{R}))$ t.q. $H * \tilde{Q}_t(x)$ est solution faible de l'équation (6). Lorsque cette équation admet une unique solution faible $u(t, x)$, ce qui est le cas pour l'équation de conservation scalaire visqueuse, on en déduit que

$$\forall T > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(t, x) - H * \tilde{\mu}_t^n(x)|}{1 + x^2} dx = 0.$$

On peut toujours conclure que π^∞ est concentrée sur les solutions du problème **(PMg)** issu de m si on sait montrer que π^∞ p.s., ds p.p., Q_s ne charge pas les points. Mais en général, il n'est plus possible déduire cette propriété de la continuité des solutions faibles de (6) sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$. En effet, en dehors de la situation très particuliere où la masse totale de la mesure $\tilde{Q}_t$ est égale à 1, le fait que cette mesure ne charge pas les points n'entraîne pas nécessairement la même chose pour Q_t. Dans le cas de l'équation de conservation scalaire visqueuse [A5], je montre grâce à des estimations sur le système de particules que toute la suite π^n converge vers δ_P où P désigne l'unique solution du problème **(PMg)** issu de m. En adaptant des travaux de Shiga et Tanaka [50], je vérifie ensuite que lorsque la fonction β est C^3, les marginales fini-dimensionnelles du champ de fluctuations $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n(\varphi(X^{i,n}) - < P, \varphi(.) >),\ \varphi \in L^2(P)\}$ convergent étroitement vers celles d'un champ gaussien centré. Cela implique en particulier que pour tout $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}$, $H * \tilde{\mu}_t^n(x)$ converge à la vitesse $1/\sqrt{n}$ vers la solution de (6) prise au point (t,x).

Du fait de la possibilité pour les particules de poids opposés de se croiser, le système réordonné n'est plus en général un processus de diffusion. C'est pourquoi je propose dans [A11] de modifier la dynamique du système de particules $(X^{1,n},\ldots,X^{n,n})$ en tuant les couples de particules de signes poids opposés qui se croisent. En termes d'approximation de la solution de (6), cette idée s'avère assez naturelle. En effet si $I_t \subset \{1,\ldots,n\}$ désigne l'ensemble des indices des particules toujours en vie à l'instant t, la solution approchée $U_n(t,x) = \frac{1}{n}\sum_{i\in I_t} h(X_0^i)H(x - X_t^{i,n})$ est alors telle que $\max_{x\in\mathbb{R}} U_n(t,x)$ (resp. $\min_{x\in\mathbb{R}} U_n(t,x)$) decroît (resp. croît) avec t, propriétés que l'on peut voir comme une traduction au niveau discret du principe de maximum que l'on attend pour les solutions de (6) en écrivant formellement cette équation $\partial_t u = \alpha'(u)\partial_{xx}^2 u + \alpha''(u)(\partial_x u)^2 - \beta'(u)\partial_x u$. En outre, la variation totale de $x \to U_n(t,x)$ diminue avec t. Dans [A11], je contruis une solution au système de particules avec suppression des couples de poids opposés qui se croisent

$$dX_t^{i,n} = 1_{I_t}(i)\left(\sqrt{2\nu_n}dW_t^i + \beta'(U_n(s,X_s^{i,n}))dt\right),$$

associé à l'équation de conservation scalaire. Je montre que lorsque la viscosité $\nu_n > 0$ converge vers $\nu \geq 0$,

$$\forall T > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u^\nu(t,x) - U_n(t,x)|}{1+x^2}dx = 0,$$

où u^ν désigne la solution de l'équation visqueuse $\partial_t u = \nu\partial_{xx}^2 u - \partial_x\beta(u)$ dans le cas $\nu > 0$ et la solution entropique de l'équation sans viscosité dans le cas $\nu = 0$. Dans ce dernier cas, la preuve du résultat de convergence est basée sur l'étude du système de particules réordonné.

On peut toujours définir le système réordonné sans introduire de bruit $\nu_n > 0$. Lors des chocs, les particules de même poids se collent tandis que les couples de particules de poids opposés se détruisent. L'approche développée dans [A11] permet de montrer la convergence de la solution approchée construite à l'aide de ce système de particules collantes signées vers la solution entropique u^0. Dans [A13], je traduis ce résultat avec des outils purement déterministes. D'un point de vue numérique, il est possible de simuler de façon exacte le système en déterminant les instants de chocs successifs. Mais cela risque de devenir coûteux lorsqu'il y a beaucoup de particules. Brenier et Grenier [16] présentent une alternative plus efficace dans le cas où toutes les particules sont de même signe : les n positions à un instant t arbitraire peuvent être obtenues par un unique calcul d'enveloppe convexe avec un coût en $\mathcal{O}(n\log(n))$ opérations. Dans [A13], je propose l'adaptation suivante dans le cas où des particules positives coexistent avec des particules négatives : pour un pas de temps $\Delta t > 0$, on calcule les positions des particules à l'instant Δt comme si elles étaient toutes de même poids, puis on supprime les couples de poids opposés qui partagent la même position et on itère cette opération élémentaire. Je montre que si $\Delta t \to 0$ et $n \to +\infty$ la solution approchée ainsi construite converge toujours vers la solution entropique u^0.

2.2 Dimension d'espace $d \geq 2$

Dans [A9], j'utilise l'approche gradient pour construire une approximation particulaire probabiliste de la solution de l'équation de conservation scalaire avec viscosité

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(t,x) = \nu \Delta u(t,x) - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \beta_i(u(t,x)), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x) \end{array} \right. \tag{12}$$

où $\nu > 0$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ est une fonction C^2 bornée ainsi que ses dérivées. Lorsque la condition initiale u_0 est une fonction bornée qui admet des dérivées au premier ordre au sens des distributions dans $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $u(t,.)$ a la même propriété et il existe une constante c t.q. $\forall t \geq 0$, $u(t,.) = c + \nabla\gamma * \nabla u(t,.)$. En outre les dérivées au premier ordre de u par rapport aux variables spatiales $(\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_d} u)$ sont solution du système obtenu formellement dans l'introduction de cette partie consacrée à l'approche gradient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v_i = \nu \Delta v_i - \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} (\beta_j'(c + \nabla\gamma * v) v_i) \\ v_i(0,x) = \partial_{x_i} u_0(x) \end{array} \right. , 1 \leq i \leq d. \tag{13}$$

Comme la solution de (12) s'exprime à partir de la solution d'une équation analogue où toutes les coordonnées d'espace t.q. $\|\partial_{x_i} u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$ sont supprimées, on peut supposer sans restriction que pour tout $1 \leq i \leq d$, $\|\partial_{x_i} u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} > 0$.
Pour $(P^1, \ldots, P^d) \in \mathcal{P}(C([0,+\infty), \mathbb{R}^d))^d$, on note respectivement $\tilde{P}^i$ la mesure de densité $h_i(X_0)$ où $h_i(x) = \|\partial_{x_i} u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \text{signe}(\partial_{x_i} u_0(x))$ par rapport à la probabilité P^i et $\tilde{P}^i_s$ sa marginale au temps s. On dit que $(P^1, \ldots, P^d)$ est solution du problème **(PMg)** issu de u_0 si pour tout $1 \leq i \leq d$,

1. $P^i_0 = \frac{|\partial_{x_i} u_0(x)|}{\|\partial_{x_i} u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}} dx$.
2. pour tout $t \geq 0$, P^i_t admet une densité bornée par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.
3. $\forall \varphi \in C^2_b(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(X_t) - \varphi(X_0) - \int_0^t \nu \Delta\varphi(X_s) + \beta'(c + \nabla\gamma * \tilde{P}_s(X_s)).\nabla\varphi(X_s) ds$ est une P^i martingale (avec $\nabla\gamma * \tilde{P}_s = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}\gamma * \tilde{P}^j_s$).

Ce problème est naturellement associé au système (13) dans la mesure où si $(P^1, \ldots, P^d)$ en est solution, alors $t \to (\tilde{P}^1_t, \ldots, \tilde{P}^d_t)$ est solution faible de (13).
Dans [A9], après avoir montré l'existence d'une unique solution pour ce problème et vérifié que l'on a alors $u(t,x) = c + \nabla\gamma * \tilde{P}_t(x)$, j'obtiens un résultat de propagation du chaos. A cause de l'explosion du noyau $\nabla\gamma$ à l'origine, il est nécessaire d'utiliser un cutoff pour définir le système de particules. En suivant l'approche de Marchioro et Pulvirenti [38] et Méléard [40] pour le noyau de Biot et Savart qui intervient dans la formulation tourbillon vitesse de l'équation de Navier-Stokes 2d et qui fait intervenir les dérivées de la solution fondamentale du Laplacien γ, il est possible de modifier $\nabla\gamma$ sur la boule centrée en l'origine et de rayon $\epsilon > 0$ pour obtenir un noyau K_ϵ lipschitzien et borné. Soit $(Z^k(0) = (Z^k_1(0), \ldots, Z^k_d(0)))_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables initiales I.I.D. suivant une probabilité sur $\mathbb{R}^d$ dont la ième marginale possède la densité $|\partial_{x_i} u_0| / \|\partial_{x_i} u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $(W^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de mouvements browniens indépendants (et indépendants des variables initiales). Pour $1 \leq k \leq n$, la k-ème particule

$Z^k(t) = (Z_1^k(t), \dots, Z_d^k(t))$ évolue dans $(\mathbb{R}^d)^d$ suivant l'équation

$$Z_i^{k,n}(t) = Z_i^k(0) + \sqrt{2\nu}\, W_t^k + \int_0^t \beta' \left(c + \sum_{j=1}^d \frac{1}{n-1} \sum_{l \neq k} K_j^{\epsilon_n}(Z_i^{k,n}(s) - Z_j^{l,n}(s)) h_j(Z_j^l(0)) \right) ds,$$

$1 \leq i \leq d$ avec $\epsilon_n > 0$. Si $\epsilon_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, j'obtiens la convergence en probabilité des mesures empiriques $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{Z_1^{k,n}}, \dots, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{Z_d^{k,n}}\right)$ vers l'unique solution $(P^1, \dots, P^d)$ du problème **(PMg)** issu de u_0. Comme corollaire pour tout $T > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d} \mathbb{E} \left| u(t,x) - c - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^d K_i^{\epsilon_n}(x - Z_i^{k,n}(s)) h_i(Z_i^k(0)) \right| = 0,$$

et il est possible d'approcher la solution de (12) à l'aide du système de particules.

On peut bien sûr envisager de construire des approximations particulaires de la solution de (12) par l'approche directe au moins lorsque la fonction $\beta(u)/u$ a de bonnes propriétés. Il est toutefois important de noter qu'à la fois d'un point de vue théorique et d'un point de vue numérique, la convergence du noyau avec cutoff vers $\nabla\gamma$ est bien plus facile à manipuler que la convergence des approximations de l'identité qui interviendraient alors dans la définition du système de particules. La contrepartie est que dans l'approche gradient les particules évoluent dans $(\mathbb{R}^d)^d$ alors que dans l'approche directe, elles évoluent dans $\mathbb{R}^d$.

3 Approche de type cinétique

Dans [45], Perthame et Tadmor associent l'équation cinétique

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) + \sum_{i=1}^d \beta_i'(v) \partial_{x_i} f + \lambda(f(t,x,v) - 1_{\{v \leq w(t,x)\}}) = 0, (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ w(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x,v) dv \quad \text{et} \quad f(0,x,v) = f_0(x,v) \end{cases} \tag{14}$$

où le paramètre λ est strictement positif à la loi de conservation scalaire non visqueuse

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \beta_i(u(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{15}$$

où la fonction de flux $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ est C^1 et la condition initiale $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction positive intégrable. Lorsque $f_0(x,v) = 1_{\{v \leq u_0(x)\}}$, ils montrent que pour $\lambda \to +\infty$, la solution $f(t,x,v)$ de (14) converge dans $L_t^\infty(\mathbb{R}_+, L_{x,v}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ vers $1_{\{v \leq u(t,x)\}}$ où $u(t,x)$ désigne l'unique solution entropique de l'équation de conservation scalaire (15). Heuristiquement, on peut se convaincre de ce résultat de la façon suivante. Si on intègre (14) en v, on obtient $\partial_t w(t,x) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}_+} \beta_i'(v) f(t,x,v) dv = 0$. Dans le passage à la limite, $f(t,x,v)$ et $1_{\{v \leq w(t,x)\}}$ deviennent très proches et remplaçant formellement $f(t,x,v)$ par $1_{\{v \leq w(t,x)\}}$ dans la dernière équation, on trouve que w vérifie l'équation de conservation scalaire.

Dans [A2], je me suis intéressé à l'interprétation probabiliste de l'équation (14) dans le cas où la condition initiale $f_0(x,v)$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Le terme non linéaire dans cette équation $1_{\{v\leq w(t,x)\}}$ est semi-local : la fonction $f(t,x,v)$ y figure après intégration par rapport au paramètre de vitesse $v \in \mathbb{R}_+$ mais pas par rapport à la variable d'espace x.
Pour les solutions f positives, l'équation (14) prise au sens faible est équivalente à

$$\partial_t f(t,x,v) = L^*(w(t,x))f(t,x,v)$$

où pour $y \in \mathbb{R}_+$, l'opérateur intégro-différentiel $L(y)$ d'adjoint $L^*(y)$ est défini par

$$\forall \varphi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+),\ L(y)\varphi(x,v) = \sum_{i=1}^d \beta_i'(v)\partial_{x_i}\varphi(x,v) + \lambda 1_{\{y>0\}}\frac{1}{y}\int_0^y (\varphi(x,\tilde{v}) - \varphi(x,v))d\tilde{v}.$$

On associe naturellement à cette équation de Fokker-Planck un problème de martingales sur l'espace des fonctions càdlàg de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ dont le processus canonique est noté $(X_t,V_t)_{t\leq T}$. Une probabilité P sur cet espace telle que $\forall t \in [0,T],\ P_t = p(t,x,v)dxdv$ est solution du problème de martingales non linéaire si $p(0,x,v) = f_0(x,v)$ et si pour $w(t,x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t,x,v)dv$, $\forall \varphi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$,

$$M_t^\varphi = \varphi(X_t,V_t) - \varphi(X_0,V_0) - \int_0^t L(w(s,X_s))\varphi(X_s,V_s)ds \quad \text{est une } P\text{-martingale locale.}$$

Il est facile de vérifier que la fonction $p(t,x,v)$ est alors solution faible de l'équation cinétique (14).
Dans [A2], je montre que ce problème de martingales admet une unique solution. Elle est construite de la façon suivante : la position X évolue suivant un mouvement de vitesse $\beta'(V)$ tandis qu'aux instants de sauts $(T_k)_k$ d'un processus de Poisson de paramètre λ, le paramètre de vitesse V se redistribue uniformément entre 0 et $w(T_k, X_{T_k})$ où w est la densité spatiale de la solution de (14).
Je généralise ensuite en un résultat trajectoriel le résultat de propagation du chaos pour les marginales en temps obtenu par Perthame et Pulvirenti [44]. Le système à n particules $(X^{i,n}, V^{i,n})$, $1 \leq i \leq n$ est construit à partir de n processus de Poisson de paramètre λ indépendants. L'espace $\mathbb{R}^d$ est découpé en cellules cubiques disjointes de volume $|\Delta|$. La position $X^{i,n}$ évolue suivant la vitesse $\beta'(V^{i,n})$, tandis qu'aux instants de sauts du ième processus de Poisson, le paramètre de vitesse $V^{i,n}$ se redistribue uniformément entre 0 et la densité spatiale empirique $\sum_{j\neq i} 1_{\{X^{j,n}\in\Delta\}}/((n-1)|\Delta|)$ dans la cellule Δ où se trouve $X^{i,n}$. Notons que la densité spatiale empirique n'est pas obtenue ici par la convolution de la mesure empirique avec une fonction régulière mais à partir du découpage en cellules plus adapté au problème. Le principe du passage à la limite est toutefois le même. Lorsque $n \to +\infty$, on fait tendre $|\Delta|$ vers 0 (au lieu de $\epsilon_n \to 0$) suffisamment lentement pour que $n|\Delta|$ tende vers l'infini, condition qui assure qu'il y a beaucoup de particules dans les cellules et que la densité empirique est représentative.

4 Perspectives

En dimension d'espace $d \geq 2$, je n'ai étudié l'approche gradient que dans le cas de l'équation de conservation scalaire visqueuse [A9]. La raison est que l'effet régularisant du terme $\nu\Delta u$ présent dans cette équation rend plus facile le traitement de la singularité du noyau $\nabla\gamma$ (où γ désigne la solution fondamentale du Laplacien). Mais nous avons vu que l'approche gradient est formellement envisageable pour l'équation (1) dès lors que α et β sont C^1 et que pour tout u réel, la matrice $\alpha'(u)$ est symétrique et positive. C'est le cas en particulier pour l'équation des milieux poreux $\partial_t u = \Delta(u^q)$ où $q > 1$. En 2001, dans le cadre de leur projet de deuxième année à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Gildas Guilloux et Sébastien Berthaud ont implémenté sous ma direction la méthode particulaire obtenue pour cette équation par l'approche gradient. Ils ont validé l'algorithme sur l'exemple de la solution explicite autosimilaire de Barenblatt-Pattle. Ils ont observé un bon comportement numérique, ce qui constitue une motivation pour commencer une étude mathématique de la méthode.

Le travail [A12] [C2] que nous avons mené avec Mireille Bossy trouve un prolongement naturel dans l'étude de l'équation de Navier-Stokes incompressible 2d posée dans un domaine borné (ou à l'extérieur d'un domaine borné). Dans le cas où cette équation est posée dans $\mathbb{R}^2$, Marchioro et Pulvirenti [38] et Méléard [40] [41] ont montré la convergence d'approximations particulaires construites à partir de l'interprétation probabiliste de l'équation au tourbillon. Du fait des conditions au bord, le cas d'un domaine borné est plus complexe. Si on impose une condition de non glissement, il y a création de tourbillons au voisinage du bord. Le mécanisme précis de création est difficile à comprendre. Sous cette condition de non glissement, Benachour, Roynette et Vallois [10] ont donné une interprétation probabiliste de l'équation au tourbillon à l'aide d'un processus de branchement non linéaire, pour lequel les branchements ont lieu au bord. La méthode particulaire qui découle de cette interprétation s'avère toutefois très difficile à implémenter. Essayer d'améliorer la compréhension et la prise-en-compte des conditions au bord afin de construire un algorithme plus pratique me semble un problème difficile mais très intéressant.

Enfin, une des limitations de l'interprétation probabiliste en terme d'équation de Fokker-Planck décrite dans cette première partie est qu'elle permet de traiter une équation de la forme (1) mais pas un système d'équations. Le cas du système de Navier-Stokes 2d ne constitue pas une exception : le passage à la formulation tourbillon permet de se ramener à une seule équation. Or la plupart des modèles physiques même simples se traduisent mathématiquement par des systèmes d'équations. Je pense que trouver un moyen de dépasser cette limitation pour construire un algorithme particulaire probabiliste de résolution d'un système simple (p-système ou dynamique des gaz isentropiques par exemple) constituerait une avancée très importante.

Deuxième partie

Modèles de polymères et d'aérosols

Les deux modèles étudiés dans cette partie concernent les polymères mais sont de natures assez différentes. Le premier décrit l'évolution de la taille des aérosols ou des molécules de polymères dans un milieu homogène en présence de certains des phénomènes physiques suivants : coagulation, fragmentation, nucléation, condensation, évaporation. Le second traite des écoulements de solutions diluées de polymères.

5 Equations de Smoluchowski

J'ai participé à deux études sur les équations de ce type. L'une [P1] de nature plutôt théorique vise à obtenir par des techniques probabilistes de nouveaux résultats d'existence et d'unicité pour l'équation de coagulation fragmentation discrète. L'autre [C3] propose et valide numériquement un algorithme particulaire probabiliste pour la résolution de l'équation de coagulation continue en présence d'évaporation, de condensation et de nucléation.

5.1 Equation de coagulation fragmentation discrète

L'équation de coagulation fragmentation discrète de Smoluchowski décrit l'évolution de la concentration $c_t(i)$ de polymères de masse $i \in \mathbb{N}^*$ dans une solution homogène lorsque deux polymères de masse j et k coagulent au taux $K_{j,k} = K_{k,j}$ pour former un polymère de masse $j+k$ tandis qu'un polymère de masse $j+k$ se fragmente au taux $F_{j,k} = F_{k,j}$ si $j \neq k$ et $\frac{1}{2}F_{j,j}$ sinon pour former deux polymères de masses respectives j et k

$$\begin{cases} c_0(i) = \gamma(i) \\ \partial_t c_t(i) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}\left(K_{i-j,j}c_t(i-j)c_t(j) - F_{i-j,j}c_t(i)\right) - \sum_{j\in\mathbb{N}^*}\left(K_{i,j}c_t(j)c_t(i) - F_{i,j}c_t(i+j)\right). \end{cases} \tag{16}$$

Si beaucoup d'études mathématiques ont été consacrées à (16) en l'absence de fragmentation (voir par exemple la synthèse d'Aldous [1] ou le travail de Deaconu et Tanré [23] et les références qui y sont citées), on en connaît moins sur cette équation en présence de ce phénomène. Du point de vue déterministe, on peut néanmoins citer les résultats de Spouge [52], Ball et Carr [6] et da Costa [20]. Du point de vue de l'interprétation probabiliste, on peut mentionner les travaux de Guias [27] et de Jeon [32].

Dès lors que la masse totale $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} i\gamma(i)$ est finie, il n'est pas restrictif de supposer qu'elle est égale à 1 puisque c_t est solution de l'équation (16) si et seulement si $c_t/\sum_{i\in\mathbb{N}^*} i\gamma(i)$ est solution de l'équation de coagulation fragmentation obtenue en multipliant le noyau de coagulation par $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} i\gamma(i)$ et en divisant la condition initiale par cette quantité. Comme à la fois lors des coagulations $\{j,k\} \to j+k$ et des fragmentations $j+k \to \{j,k\}$ la masse est conservée, d'un point de vue probabiliste il est naturel de s'intéresser à l'évolution de la distribution de masse $p_t(i) = ic_t(i)$. En utilisant la symétrie des noyaux K et F, on obtient que c_t est solution de (16) si et seulement si p_t est solution de l'équation dite de transfert de masse :

$$\begin{cases} p_0(i) = i\gamma(i) \\ \partial_t p_t(i) = \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{K_{i-j,j}}{j} p_t(i-j)p_t(j) - \frac{(i-j)F_{i-j,j}}{i} p_t(i) \right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{K_{i,j}}{j} p_t(j)p_t(i) - \frac{iF_{i,j}}{i+j} p_t(i+j) \right) \end{cases} \tag{17}$$

Ce lien a d'abord été mis en évidence et exploité par Babovski [5] dans le cas de l'équation de coagulation discrète ($F_{j,k} \equiv 0$) puis par Eibeck et Wagner [24] dans le cas de l'équation de coagulation générale où les masses des polymères prennent n'importe quelle valeur positive (voir également les travaux de Deaconu, Fournier et Tanré [21] et [22]). Tous ces auteurs se sont intéressé à l'interprétation probabiliste de cette équation de transfert de masse en l'absence de fragmentation.

Dans [P1], dans différents cadres d'hypothèses sur les noyaux de coagulation et de fragmentation K et F et sur la condition initiale γ, je construis des processus de sauts non linéaires tels que les marginales en temps de leur loi fournissent une solution de (17). Certains de ces processus sont obtenus à partir de systèmes de particules en interaction simulables en faisant tendre le nombre de particules vers l'infini. En utilisant le lien entre l'équation de transfert de masse (17) et l'équation de Smoluchowski (16), je déduis des résultats d'existence et d'unicité qui semblent nouveaux pour cette dernière équation.

5.2 Modélisation des aérosols dans l'atmosphère

L'évolution des aérosols est un point clé dans la modélisation de l'atmosphère. Beaucoup de conséquences de la présence d'aérosols, comme les propriétés optiques ou les répercussions en termes de santé publique dépendent de la loi des tailles d'aérosols présents. C'est pourquoi, il est important de modéliser correctement les différents processus physiques auxquels les aérosols sont soumis : la coagulation, la condensation-évaporation et la nucléation. L'équation dite de la dynamique générale décrit l'évolution de la concentration $c(t,x)$ d'aérosols de volume $x \geq x_0$ (x_0 est le volume de nucléation i.e. le plus petit volume pour lequel un aérosol est stable) à l'instant t en présence de ces trois phénomènes :

$$\begin{aligned} \partial_t c(t,x) =& \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x-x_0} K(y,x-y)c(t,y)c(t,x-y) - c(t,x)\int_{x_0}^{\infty} K(x,y)c(t,y)dy \\ & - \partial_x(I(t,x)c(t,x)) + J_0(t)\delta_{x_0}, \quad x \geq x_0 \end{aligned} \tag{18}$$

Cette équation est obtenue en ajoutant à l'équation de coagulation continue de Smoluchowski

- un terme de condensation-évaporation : les aérosols de volume x vont avoir tendance à grossir ou à maigrir suivant que $I(t,x)$ est positif ou non.
- un terme de nucléation i.e. de création d'aérosols de volume x_0 au taux $J_0(t)$.

Le noyau de coagulation est toujours supposé symétrique : $K(x,y) = K(y,x)$.

Les méthodes numériques généralement proposées pour traiter le terme de coagulation dans le domaine de la modélisation atmosphérique sont des méthodes dites de "size-binning" qui consistent à discrétiser l'espace des volumes en plusieurs intervalles et à

intégrer la concentration d'aérosol sur chacun de ces intervalles (voir par exemple [31]). Il faut ensuite déduire de l'équation de départ une équation approchée pour l'évolution de ces concentration intégrées ce qui explique les problèmes de convergence rencontrés par ces méthodes.
Dans [C3], avec Edouard Debry et Bruno Sportisse, nous proposons un algorithme particulaire stochastique basé sur l'interprétation probabiliste de l'équation de transfert de volume satisfaite par $p(t,x) = xc(t,x)$ lorsque c vérifie l'équation de la dynamique générale :

$$\partial_t p(t,x) = \int_{x_0}^{x-x_0} \frac{K(y,x-y)}{x-y} p(t,y)p(t,x-y) - p(t,x)\int_{x_0}^{\infty} \frac{K(x,y)}{y} p(t,y)dy \\ - \partial_x(I(t,x)p(t,x)) + \frac{I(t,x)}{x} p(t,x) + x_0 J_0(t)\delta_{x_0}.$$

Si cette transformation rend le terme de coagulation conservatif, elle fait en revanche apparaître le terme $(I(t,x)/x)p(t,x)$ qui se traite par duplication ou suppression des particules existantes suivant que $I(t,x)$ est positif ou négatif.
Nous validons l'algorithme en l'absence de nucléation $x_0 = 0$ dans le cas particulier d'un noyau de coagulation constant $K(x,y) = \kappa$ et d'une condensation linéaire $I(t,x) = cx$ où il existe une solution analytique pour l'équation de la dynamique générale.

6 Etude d'une méthode couplée EDS/EDP pour la simulation micro/macro des solutions diluées de polymères

Les solutions de polymères sont des fluides non-newtoniens : les contraintes subies par un élément de fluide dépendent de l'histoire des déformations de cet élément. Pour décrire l'écoulement d'une telle solution dans l'approche de la mécanique des milieux continus, on a donc besoin d'une équation constitutive qui relie le tenseur des contraintes à l'histoire des déformations en plus des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Pour écrire cette équation au niveau macroscopique, il est nécessaire de faire une approximation dite de clôture.

Une alternative à l'introduction contestable de cette approximation de clôture consiste à utiliser un modèle cinétique qui donne une description plus ou moins grossière de l'évolution des conformations des molécules de polymères au niveau microscopique. Chaque élément de fluide contient un grand nombre de molécules de polymères qui peuvent être décrites par la distribution de probabilité de leurs conformations. L'écoulement macroscopique altère les conformations tandis que les contraintes subies par un élément de fluide sont liées à la distribution microscopique des conformations de polymères dans cet élément. Le modèle cinétique est spécifié au travers de l'équation de Fokker-Planck qui gouverne l'évolution le long de l'écoulement de la distribution de probabilité des conformations. Le tenseur des contraintes s'exprime alors comme l'espérance d'une fonction des conformations.

Plutôt que de résoudre l'équation de Fokker-Planck, on peut évaluer cette espérance par la méthode de Monte-Carlo : il suffit de calculer la moyenne des contributions d'un grand

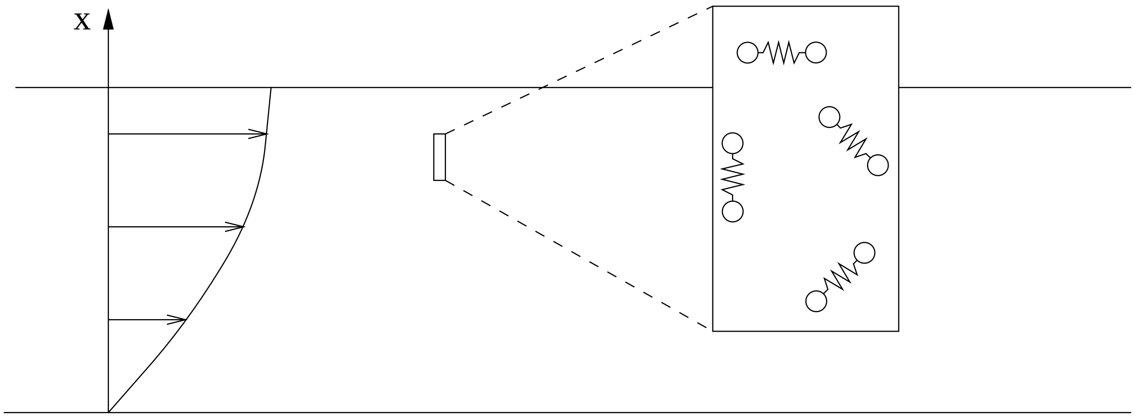

FIG. 1 – Profil de vitesse dans un écoulement cisaillé d'une solution diluée de polymères.

nombre de réalisations de la solution de l'équation différentielle stochastique qui décrit l'évolution aléatoire de la conformation d'un polymère. Cette idée est à la base des méthodes de type CONNFFESSIT (Calculation of Non-Newtonian Fluids : Finite Elements and Stochastic Simulation Techniques) introduites dans les années 1990 (voir entre autres [35] [28]).

Dans [P3], avec Claude Le Bris et Tony Lelièvre, nous nous intéressons à l'analyse numérique d'une telle méthode appliquée au cas très simple d'un écoulement cisaillé 2D du type plan de Couette pour une solution diluée de polymères. Le problème est celui décrit par Bonvin et Picasso [11]. Le fluide initialement à l'équilibre est confiné entre deux plans d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. Ces plans sont mis en mouvement avec des vitesses respectives $f_0(t)$ et $f_1(t)$ normales à l'axe des x. Comme la vitesse $u(t, x)$ à l'instant t du fluide à distance x du plan inférieur est normale à l'axe des x et que la dépendance spatiale des grandeurs physiques se réduit à x, l'équation de conservation de la quantité de mouvement au niveau macroscopique est uni-dimensionnelle et linéaire (le terme non-linéaire d'advection est nul) :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = \partial_x \tau(t,x) + f_{ext}(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u(t,0) = f_0(t), \quad u(t,1) = f_1(t). \end{cases} \tag{19}$$

L'équation de conservation de la masse i.e. le fait que le champs de vitesse est à divergence nulle est automatiquement satisfaite. Le terme f_{ext} représente une force extérieure tandis que le tenseur des contraintes $\tau(t, x)$ est obtenu à partir du modèle microscopique Hookean Dumbbell :

$$\begin{cases} \tau(t,x) = \mathbb{E}(X(t)Y(t,x)) \\ dX(t) = -\frac{X(t)}{2} dt + dV_t, \quad X(0) = X_0 \\ dY(t,x) = \left(\partial_x u(t,x) X(t) - \frac{Y(t,x)}{2}\right) dt + dW_t, \quad Y(0,x) = Y_0 \end{cases} \tag{20}$$

où (V_t, W_t) est un mouvement brownien bidimensionnel indépendant des conditions initiales X_0 et Y_0 qui sont supposées gaussiennes centrées réduites indépendantes, ce qui traduit que l'on part de l'équilibre. La loi du couple de variables aléatoires $(X(t), Y(t, x))$ représente la distribution des conformations des molécules de polymères à l'instant t aux

points à distance x du plan inférieur. Une molécule de polymère est modélisée comme une haltère ou Dumbbell en anglais d'élongation X suivant l'axe des x et Y suivant sa normale. Elle subit une force de rappel linéaire d'origine entropique (termes en $-\frac{X_t}{2}dt$ et $-\frac{Y_t}{2}dt$), une force de trainée due au mouvement macroscopique du solvant (terme $\partial_x u(t,x)X(t)dt$) et une force Brownienne (termes en dV_t et dW_t) qui résulte des collisions avec les molécules du solvant soumises à l'agitation thermique. Il faut noter que le problème (19)+(20) a un équivalent purement macroscopique : en effet, on exprime facilement $\mathbb{E}(X(t)Y(t,x))$ comme une intégrale de $\partial_x u(s,x)$ en la variable temporelle s. Il est possible de discrétiser ce modèle macroscopique déterministe sans simuler les Dumbbells. L'étude que nous avons menée dans [P3] est une première étape vers l'analyse de modèles micro/macro plus complexes qui ne possèdent pas d'équivalent macroscopique comme par exemple le modèle FENE où les dumbbells sont soumis à une force de rappel explosive qui les empêche de dépasser une certaine élongation limite.
Pour étudier ce système, nous nous ramenons à des conditions de Dirichlet homogènes sur la vitesse $u(t,0) = u(t,1) = 0$ en retranchant les quantités adéquates à $Y(t,x)$ et $f_{ext}(t,x)$.
Il faut noter que l'équation sur $X(t)$ ne fait pas intervenir les autres variables u et Y et admet une unique solution. Cette constatation faite, nous montrons que lorsque $u_0 \in L^2_x$ et $f_{ext} \in L^1_t(L^2_x)$, il existe une unique solution faible $u \in L^\infty_t(L^2_x) \cap L^2_t(H^1_{0,x})$ et $Y \in L^\infty_t(L^2_x(L^2_\omega))$ (ω désigne l'élément générique de l'espace de probabilité sous-jacent) du problème (19)+(20) sur l'intervalle de temps $[0,T]$ (où $T > 0$) au sens suivant : l'équation en u est vérifiée contre toute fonction test de $H^1_{0,x}(]0,1[)$ et l'équation en Y est vérifiée pour presque tout x et presque tout ω. L'existence est prouvée par la méthode de Galerkin. Comme le problème est "presque" linéaire, l'unicité découle facilement de l'estimée d'énergie que nous obtenons.

Dans la méthode numérique CONNFFESSIT, le problème (19)+(20) est discrétisé à trois niveaux : en espace, en temps et l'espérance qui définit le tenseur des contraintes est approchée par la méthode de Monte-Carlo. Les vitesses sont cherchées dans un espace d'éléments finis P1 avec un pas de discrétisation en espace h. On subdivise l'intervalle de temps $(0,T)$ avec un pas Δt. Enfin, on considère n réalisations des Dumbbells $(X^i, Y^{i,j})_{1\le i\le n}$ dans l'élément fini d'indice $1 \le j \le 1/h$ et on approche le tenseur des contraintes dans cet élément par $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X^i Y^{i,j}$. Notons que pour établir un lien avec la partie I, on peut voir les n champs de Dumbells $(X^i, Y^{i,1}, Y^{i,2}, \ldots, Y^{i,1/h})_{1\le i\le n}$ comme un système de particules diffusives en interaction faible du fait du couplage introduit par la discrétisation de l'équation de conservation macroscopique de la quantité de mouvement (19).
Le résultat principal de [P3] est le suivant : sous des hypothèses un peu plus restrictives sur u_0 et f_{ext}, nous majorons la différence aux instants de discrétisation entre le champ de vitesse (resp. champ de contrainte) limite et son approximation dans $L^2_x(L^2_\omega)$ (resp. $L^1_x(L^1_\omega)$) par $C\left(h + \Delta t + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. La preuve consiste à introduire successivement les trois niveaux de discrétisation. Le passage du problème limite au problème semi-discrétisé en espace donne une contribution en $\mathcal{O}(h)$, celui du problème semi-discrétisé en espace au problème semi-discrétisé en espace et en temps donne une contribution en $\mathcal{O}(\delta t)$. Enfin l'utilisation de la méthode Monte-Carlo introduit un terme en $\mathcal{O}(\delta t + 1/\sqrt{n})$.

7 Perspectives

Comme au niveau microscopique, à la fois lors des coagulations $\{j,k\} \to j+k$ et des fragmentations $j+k \to \{j,k\}$ la masse est conservée, on s'attend à ce qu'au niveau macroscopique la masse totale $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} ic_t(i)$ des solutions de l'équation de coagulation fragmentation discrète (16) soit conservée. En l'absence de fragmentation ($F_{j,k} \equiv 0$), dans le cas de la condition intitiale $\gamma(i) = 1_{\{i=1\}}$ et du noyau de coagulation quadratique $K_{j,k} = (Aj+B)(Ak+B)$ où $A > 0$ et $B \geq 0$, Leyvras et Tschudi [36] ont construit une solution explicite dont la masse totale décroît après le temps $t = 1/(A^2+AB)$. Ce phénomène de transition de phase appelé gélification s'interprète comme la formation d'un "polymère de taille infinie". A ma connaissance, le seul résultat mathématique de portée générale concernant l'existence de solutions gélives pour (16) est celui de Jeon [32] sous les hypothèses $F_{j,k} \equiv 0$, $K_{j,k} \geq \kappa(ij)^\alpha$ avec $\kappa > 0$ et $1/2 < \alpha < 1$, et $\lim_{j+k\to+\infty} K_{j,k}/(j+k) = 0$. Le problème ouvert de l'existence de solutions gélives en présence de fragmentation me semble un sujet d'étude intéressant. D'un point de vue plus appliqué, étendre l'interprétation probabiliste développée dans [P1] au cas de l'équation de coagulation fragmentation générale où la masse d'un polymère peut prendre n'importe quelle valeur positive, ou au cas non-homogène en espace où les concentrations dépendent de la position et les polymères sont transportés par un champ de vitesse donné, pourrait permettre de développer des méthodes particulaires pour résoudre ces équations.
Concernant la modélisation des aérosols dans l'atmosphère, Edouard Debry et Bruno Sportisse sont en train de développer une méthode de résolution déterministe pour l'équation de la dynamique générale (18). Dans un premier temps, l'algorithme probabiliste présenté plus haut va servir de référence pour valider cette méthode déterministe. Dans un second temps, nous envisageons d'effectuer des comparaisons numériques entre les deux approches, un peu dans l'esprit du travail de Bossy, Fezoui et Piperno [13] concernant l'équation de Burgers.
Enfin, dans le domaine des méthodes couplées EDP/EDS pour la simulation micro/macro des solutions diluées de polymères, le modèle microscopique Hookean Dumbbell (20) est trop simple pour rendre compte des résultats expérimentaux de façon satisfaisante. Le modèle FENE (Finitely Extensible Nonlinear Elastic) limite l'élongation des Dumbells à $b > 0$ en remplaçant la force de rappel linéaire $(-X/2, -Y/2)$ par une force qui explose lorsque $X^2 + Y^2$ s'approche de b^2. Même si les molécules de polymères sont toujours représentées très grossièrement comme des haltères, ce modèle permet par exemple de reproduire numériquement le phénomène d'hysteresis observé dans l'expérience d'élongation/relaxation d'un filament de solution [51]. Reprendre l'étude que nous avons menée dans [P3] sans changer la géométrie de l'écoulement mais en remplaçant au niveau microscopique le modèle Hookean Dumbbell (20) par les équations du modèle FENE

$$\begin{cases} \tau(t,x) = \mathbb{E}\left(\frac{X(t,x)Y(t,x)}{1-(X^2(t,x)+Y^2(t,x))/b^2}\right) \\ dX(t,x) = -\frac{1}{2}\frac{X(t,x)}{1-(X^2(t,x)+Y^2(t,x))/b^2}dt + dV_t, \quad X(0,x) = X_0 \\ dY(t,x) = \left(\partial_x u(t,x)X(t,x) - \frac{1}{2}\frac{Y(t,x)}{1-(X^2(t,x)+Y^2(t,x))/b^2}\right)dt + dW_t, \quad Y(0,x) = Y_0 \end{cases}$$

me semble donc un objectif raisonnable à court terme. A plus long terme, il serait souhaitable de mener l'analyse numérique dans le cas d'un écoulement vraiment bidimensionnel.

Troisième partie

Prix d'options américaines plongés dans des prix d'options européennes

Dans le modèle de Black-Scholes, si on note t la durée entre l'instant courant et l'échéance et x le cours du sous-jacent, le prix de l'option européenne de fonction de payoff continue $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est donné par

$$v_\varphi(t,x) = \mathbb{E}\left(e^{-rt}\varphi(xe^{\sigma W_t + (r-\sigma^2/2)t}\right)$$

où W est un mouvement Brownien. Il se calcule donc facilement comme une intégrale. La fonction de prix v_φ est solution de l'équation de Black-Scholes

$$\begin{cases} \partial_t v_\varphi = \mathcal{A} v_\varphi,\ (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ v_\varphi(0,x) = \varphi(x),\ x > 0 \end{cases}$$

où $\mathcal{A}f(x) = \frac{\sigma^2 x^2}{2} f''(x) + rxf'(x) - rf(x)$.

Le prix de l'option américaine de fonction de payoff continue $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est égal à

$$v_\psi^{am}(t,x) = \sup_{\tau \le t} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}\psi(xe^{\sigma W_\tau + (r-\sigma^2/2)\tau})\right)$$

où le supremum porte sur l'ensemble des temps d'arrêt τ de la filtration du mouvement Brownien W majorés par t. En dehors des cas particulier où la fonction de payoff est $\mathcal{A}$-surharmonique (alors $v_\psi^{am} = v_\psi$) ou $\mathcal{A}$-sousharmonique (alors $v_\psi^{am}(t,x) = \psi(x)$), on ne sait pas en général donner une formule fermée pour ce prix. D'un point de vue analytique, la fonction v_ψ^{am} est solution de l'inéquation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \max\left(\psi(x) - v_\psi^{am}(t,x), (\mathcal{A} - \partial_t)v_\psi^{am}(t,x)\right) = 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ v_\psi^{am}(0,x) = \psi(x),\ x > 0. \end{cases}$$

Ainsi l'espace $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ des valeurs de (t,x) se sépare en deux régions : la zone d'exercice où $v_\psi^{am}(t,x) = \psi(x)$ et la zone de continuation où $v_\psi^{am}(t,x) > \psi(x)$ et la fonction v_ψ^{am} satisfait l'équation de Black-Scholes $\partial_t v_\psi^{am} = \mathcal{A} v_\psi^{am}$.

Au vu de ces propriétés, on peut se demander si connaissant la fonction de prix $v_\varphi(t,x)$ de l'option européenne de payoff φ, on peut identifier un payoff ψ tel que dans la zone de continuation de l'option américaine correspondante on ait $v_\psi^{am}(t,x) = v_\varphi(t,x)$. Avec Claude Martini [A7], nous donnons une réponse positive à cette question dans le cas où il existe une fonction continue $\hat{t} : \mathbb{R}_+^* \to [0,+\infty]$ telle que $\forall x > 0,\ v_\varphi(\hat{t}(x),x) = \inf_{t\ge0} v_\varphi(t,x)$ (convention $v_\varphi(\infty,x) = \liminf_{t\to+\infty} v_\varphi(t,x)$). Sous cette hypothèse, nous avons montré que la fonction de prix de l'option américaine de payoff $\hat{\varphi}(x) = \inf_{t\ge0} v_\varphi(t,x)$ est plongée dans celle de l'option européenne de payoff $\varphi(x)$ au sens où

$$v_{\hat{\varphi}}^{am}(t,x) = v_\varphi(t \vee \hat{t}(x), x).$$

Cette égalité est en particulier satisfaite dans la zone de continuation $\{(t,x) : \ t > \hat{t}(x), \ v_\varphi(t,x) > \hat{\varphi}(x)\}$ de l'option américaine.

La validité du résultat précédent dépasse le cadre du modèle de Black-Scholes. Mais l'intérêt de ce modèle est qu'il permet des calculs explicites. Sur des exemples de payoff φ pour lesquels l'hypothèse d'existence d'une courbe continue en l'argument de l'infimum est vérifiée nous obtenons des payoffs modifiés $\hat{\varphi}$ qui ne sont ni $\mathcal{A}$-surharmoniques ni $\mathcal{A}$-sousharmoniques et nous explicitons la fonction de prix américaine correspondante. Même si aucune des fonctions de payoff $\hat{\varphi}$ obtenues n'est négociée dans la pratique, ces exemples peuvent servir de cas tests pour les méthodes numériques dédiées au calcul des prix d'options américaines.
Par ailleurs, nous donnons également un exemple où l'hypothèse d'existence d'une courbe continue en l'argument de l'infimum n'est pas satisfaite et où la fonction de prix de l'option américaine de payoff $\hat{\varphi}$ n'est pas plongée dans la fonction v_φ.
Enfin, nous montrons un résultat d'injectivité de l'application qui à un payoff φ pour lequel l'hypothèse est satisfaite associe le payoff modifié $\hat{\varphi}$. La caractérisation de l'image de cette application reste en revanche un problème ouvert.

Dans [A10], toujours avec Claude Martini, nous appliquons ce résultat théorique pour développer de nouvelles approximations du prix du put américain qui correspond au payoff très important en pratique $Put(x) = (K-x)^+$. Il n'y a pas de formule fermée pour ce prix. En revanche, on connaît sa limite pour $t \to +\infty$ appelée prix du put perpétuel ainsi que la forme de la zone de continuation qui est donnée par $\{(t,x) : t > \tilde{t}(x)\}$ où la frontière d'exercice $\tilde{t} : \mathbb{R}_+^* \to [0,+\infty]$ est une fonction continue valant 0 pour $x \geq K$ et $+\infty$ pour $x \leq 2rK/(2r+\sigma^2)$ et strictement décroissante sur $[2rK/(2r+\sigma^2), K]$.
Nous paramétrisons φ en supposant que $\mathcal{A}\varphi$ est une mesure sur $\mathbb{R}_+^*$ de manière à ce que $\partial_t v_\varphi(t,x) = \mathcal{A}v_\varphi(t,x)$ s'exprime simplement comme $v_{\mathcal{A}\varphi}(t,x)$ (par commutation du générateur infinitésimal et du semi-groupe). Ce choix est utile pour étudier $\hat{\varphi}(x) = \inf_{t\geq 0} v_\varphi(t,x)$ du fait des conditions de minimalité d'Euler. Nous obtenons des conditions nécessaires sur la mesure $\mathcal{A}\varphi$ pour que la limite lorsque $t \to +\infty$ de $v_\varphi(t,x)$ soit égale au prix du Put perpetuel et que $\hat{t}$ et $\hat{\varphi}(x)$ aient des propriétés qualitatives analogues à celles de $\tilde{t}$ et $(K-x)^+$. Ces conditions nécessaires s'avèrent suffisantes pour appliquer notre résultat de plongement.
Constatant que nous ne pouvons obtenir $\hat{\varphi}(x) \equiv (K-x)^+$ à partir de notre classe de payoffs européens φ, nous développons une méthode numérique d'approximation du prix du put américain. Cette méthode consiste à se restreindre à un sous-espace de dimension finie pour les mesures $\mathcal{A}\varphi$ et à sélectionner numériquement celle qui minimise une version discrète de $\|\hat{\varphi}(x) - (K-x)^+\|_\infty$. Elle fournit de bons résultats même si d'autres méthodes proposées dans la littérature, notamment dans [33] [17], semblent plus performantes et sera intégrée dans la prochaine version du logiciel PREMIA [L]. Son gros avantage est qu'une fois la fonction de payoff optimale φ^* sélectionnée, le calcul du delta $\partial_x v_{\varphi^*}(t,x)$ de l'option européenne correspondante est très facile ; ce delta fournit bien sûr une approximation de la quantité d'actif risqué à détenir pour couvrir le put américain.

Il est possible d'envisager des prolongements à la fois théoriques et pratiques à ce travail. Comme cela a déjà été mentionné, le problème de la caractérisation de l'image par la transformation $\varphi \to \hat{\varphi}$ de l'ensemble des payoffs européens φ qui satisfont l'hypothèse d'existence d'une courbe continue en l'argument de l'infimum est ouvert. En particulier, nous n'avons pas tranché la question de savoir si la fonction de prix du Put américain peut

être plongée dans la fonction de prix d'une option européenne. Comme la paramétrisation de φ utilisée dans [A10] est peu restrictive, le fait que nous n'obtenons pas le payoff du Put dans l'image de cette classe paramétrique nous laisse conjecturer que la réponse est négative.
D'un point de vue plus pratique, le calcul du prix et de la couverture des options américaines qui portent sur un grand nombre de sous-jacents (dimension grande) est un problème important pour lequel des méthodes de type Monte-Carlo ont été développées récemment. Le résultat de plongement obtenu dans [A7] reste valable pour des généralisations multi-dimensionnelles du modèle de Black-Scholes. Il serait intéressant de voir s'il peut permettre de construire de nouvelles méthodes numériques dans ce cadre multi-dimensionnel.

Quatrième partie

Encadrement, animation et valorisation de la recherche

J'encadre depuis avril 2000 la thèse de Laurent Nguyen dans le domaine des mathématiques financières. Cette thèse qui fait l'objet d'une convention CIFRE avec le Crédit Industriel et Commercial est consacrée au problème de la calibration de modèle : il s'agit de trouver un modèle d'actif compatible avec les prix observés sur le marché des options liquides qui portent sur cet actif. Dans [A8], nous avons montré la convergence de la méthode de calibration de type Monte-Carlo introduite dans [4] dans le cas où on impose que les prix de marché qui servent à calibrer soient reproduits de façon exacte. Depuis, Laurent Nguyen a travaillé sur le théorème de la limite centrale associé à ce résultat de convergence puis sur le cas où on tolère que les prix de marché de référence soient seulement reproduits de façon approchée. Il devrait ensuite s'intéresser à la question suivante qui est importante en pratique : comment assurer que le prix d'une option calculé avec le modèle calibré est compatible avec les prix de marché des options de référence au sens où on ne peut pas construire d'arbitrage à partir de l'ensemble de ces options ?

Je participe également avec Claude Le Bris à l'encadrement de la thèse que Tony Lelièvre débute sur les problèmes mathématiques et numériques posés par la simulation d'écoulements de fluides polymériques. Le travail [P3] est un prolongement du stage de DEA que Tony Lelièvre a effectué au printemps 2000.

Depuis plusieurs années, j'encadre aussi régulièrement des stages ou des mémoires consacrés à la mise-en-œuvre informatique des méthodes particulaires dont j'étudie la convergence :
- pendant le stage qu'il a effectué au printemps 1997 dans le cadre du DEA Analyse et Systèmes Aléatoires de l'Université de Marne-la-Vallée, Frédéric Ksas a mené une étude numérique de l'approche cinétique [45] [44] [A2] dans le cas particulier de l'équation de Burgers $\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0$, pour laquelle on dispose de solutions explicites.
- dans le cadre de son stage scientifique de première année à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, d'avril à juillet 1999, Sandrine Desjardins a comparé l'approche gradient

et l'approche directe dans le cas de l'équation de Burgers visqueuse et implémenté l'approche gradient dans le cas de l'équation des milieux poreux 1d et celui d'une équation de conservation scalaire visqueuse 2d. Pour ce travail, elle a obtenu le prix du meilleur stage scientifique 1999 décerné par la fondation de l'Ecole des Ponts.
- le projet de seconde année de l'ENPC effectué en 2001 par Gildas Guilloux et Sébastien Berthaud a consisté en la validation sur la solution explicite de Barenblatt-Pattle de la méthode particulaire de type gradient appliquée à l'équation des milieux poreux 2d et à la parallèlisation de cette méthode.

Enfin, dans le domaine des contrats industriels, j'ai mené avec Bernard Lapeyre en 1998 une étude pour le compte d'EDF portant sur la possibilité de construire un indicateur de risque à partir des incidents relevés dans les centrales nucléaires. La communication [C1] est issue de cette étude. Je participe également au développement du logiciel de calcul de prix et de couvertures d'options PREMIA [L]. Ce logiciel est développé au sein du projet Mathfi dont je fais partie et qui est commun à l'INRIA, à l'ENPC et à l'Université de Marne-la-Vallée. Il est financé par un consortium qui regroupe le Crédit Agricole Indosuez, le Crédit Lyonnais, la Caisse Commerciale des Banques Populaires, l'Union Européenne du Crédit Industriel et Commercial, la Caisse des Dépôts et Consignations, la BNP-Paribas et Electricité De France. Outre la rédaction de documentations, je participe essentiellement en encadrant des stages consacrés à la mise-en-œuvre de méthodes numériques tirées d'articles de recherche récents qui sont ensuite intégrées dans PREMIA :
- stage scientifique de première année de l'ENPC de Paul Strachman consacré aux méthodes de Ju [33] et de Carr [19] pour le put américain (1999)
- stage de fin d'études de l'Institut Galilée de Youssef Itribe consacré à la méthode binômiale de Rogers et Stapelton [47] pour les options à barrières (2000)
- stage scientifique de Jérôme Hugueny consacré à la méthode LUBA de Broadie et Detemple [17] pour le put américain (2000)
- projet de fin d'étude de Sophie Deborggraeve (Institut Galilée) sur la méthode de Zhang [56] pour les options européennes sur moyenne (2000)
- stage scientifique de Jean-François Bergez consacré à la méthode de Ben Ameur, Breton et L'Ecuyer [8] pour les options américaines sur moyenne et à la méthode de Rogers [46] pour les options américaines.

J'organise également depuis septembre 2000 le groupe de travail du projet Mathfi, dont le but est de présenter les articles qui traitent de méthodes susceptibles d'être implémentées dans PREMIA.

Liste des publications

Articles

[A1] Diffusions avec un coefficient de dérive non linéaire et irrégulier et interprétation probabiliste d'équations de type Burgers. *ESAIM, Probab. Stat.*, 1 :339–355, 1997.

[A2] Propagation trajectorielle du chaos pour les lois de conservation scalaires. *Séminaire de Probabilités XXXII*, pages 215–230. Springer, 1998.

[A3] Convergence of moderately interacting particle systems to a diffusion-convection equation. *Stochastic Processes Appl.*, 73(2) :247–270, 1998.

[A4] avec S. Méléard. Propagation of chaos and fluctuations for a moderate model with smooth initial data. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.*, 34(6) :727–766, 1998.

[A5] Diffusion processes associated with nonlinear evolution equations for signed measures. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 2(1) :69–91, 2000.

[A6] Probabilistic approximation for a porous medium equation. *Stochastic Processes Appl.*, 89(1) :81–99, 2000.

[A7] avec C. Martini. American prices embedded in European prices. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. nonlinear*, 18(1) :1–17,2001.

[A8] avec L. Nguyen. Minimisation de l'entropie relative par méthode de Monte-Carlo. *C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. I*, 332(4) :245–350, 2001.

[A9] Probabilistic gradient approximation for a viscous scalar conservation law in space dimension $d \geq 2$. *Stochastics Stochastics Rep.*, 71 :243–268, 2001.

[A10] avec C. Martini. Yet Another Approximation of the American Put. *Preprint INRIA 3851 et CERMICS 2000-188, accepté dans Ann. Appl. Probab. sous le titre* Approximation of American put prices by European prices via an embedding method.

[A11] Probabilistic characteristics method for a 1d scalar conservation law. *Preprint CERMICS 2000-193, accepté dans Ann. Appl. Probab.*

[A12] avec M. Bossy. Rate of convergence of a particle method for the solution of a 1d viscous scalar conservation law in a bounded interval. *Preprint CERMICS 2000-197, accepté dans Ann. Probab.*

[A13] Particules collantes signées et lois de conservation scalaires 1d. *C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. I*, 334(3) :233-238, 2002.

Prépublications

[P1] Nonlinear processes associated with the discrete Smoluchowski coagulation fragmentation equation. *Preprint CERMICS 2001-207.*

[P3] avec T. Lelièvre et C. Le Bris Numerical Analysis of micro-macro simulations of polymeric fluid flows : a simple case. *Preprint CERMICS 2001-214.*

Thèse

[T] Sur l'interprétation probabiliste de quelques équations aux dérivées partielles non linéaires. *Thèse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*, sous la direction de Sylvie Méléard, 1998.

Communications

[C1] avec J. Collet, P. François et B. Lapeyre. Comparison of Some Precursor-Based Core-Melt-Frequency Estimators. Communication présentée par J. Collet à Internat. Conf. on Probab. Safety Assesment, Washington D.C. 1999.

[C2] avec M. Bossy. A particle method for the solution of a 1d viscous scalar conseravtion law in a bounded interval. *Monte Carlo Methods Appl.*, 7(1-2) :45–53, 2001. Proc. Internat. Conf. on Monte Carlo and Probabilistic methods for PDEs, Monaco 3-5 july 2000.

[C3] avec E. Debry et B. Sportisse. Modeling aerosol dynamics : a stochastic algorithm. Communication présentée par E. Debry à Internat. Conf. APMS 2001, *Proceedings à paraître chez Springer geoscience.*

Logiciel

[L] PREMIA : Logiciel de pricing d'options développé au sein du projet Mathfi commun à l'INRIA, à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et à l'Université de Marne-la-Vallée. Financé par un consortium de sept banques et industriels.
http ://cermics.enpc.fr/ premia/

Bibliographie générale

[1] D.J. Aldous. Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation and coagulation) : a review of the mean-field theory for probabilists. *Bernoulli*, 5(1) :3–48, 1999.

[2] C.R. Anderson. A vortex method for flows with slight density variations. *Journal of Comp. Physics*, 61 :417–444, 1985.

[3] D.G. Aronson et L.A. Caffarelli. Optimal regularity for one-dimensional porous medium flow. *Revista Matematica Iberoamericana*, 2(4) :357–366, 1986.

[4] M. Avellaneda, R. Buff, C. Friedman, N. Granchamp, L. Kruk et J. Newman. Weighted monte-carlo : A new technique for calibrating asset-pricing models. *Int. J. Theor. and Appl. Finance*, 4(1) :91–119, 2001.

[5] H. Babovski. On a monte carlo scheme for Smoluchowski's coagulation equation. *Monte Carlo Methods and Appl.*, 5(1) :1–18, 1999.

[6] J.M. Ball et J. Carr. The discrete coagulation-fragmentation equations : Existence, uniqueness and density conservation. *J. Statist. Phys.*, 61 :203–234, 1990.

[7] R.F. Bass et E. Pardoux. Uniqueness for diffusions with piecewise constant coefficients. *Probability Theory and Related Fields*, 76 :557–572, 1987.

[8] H. Ben Ameur, M. Breton, et P. L'Ecuyer. A numerical procedure for pricing American-style Asian options. *Preprint*, 1999.

[9] S. Benachour, P. Chassaing, B. Roynette et P. Vallois. Processus associés à l'équation des milieux poreux. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.*, IV. Ser. 23(4) :793–832, 1996.

[10] S. Benachour, B. Roynette, et P. Vallois. Branching process associated with 2d Navier-Stokes equation. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 17(2) :331–373, 2001.

[11] J. Bonvin et M. Picasso. Variance reduction methods for CONNFFESSIT-like simulations. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 84 :191–215, 1999.

[12] M. Bossy. Optimal rate of convergence of a stochastic particle method for the solution of a 1d viscous scalar conservation law. *Rapp. de Rech. INRIA RR-3924*, 2000.

[13] M. Bossy, L. Fezoui et S. Piperno. Comparison of a stochastic particle method and a finite volume deterministic method applied to Burgers equation. *Monte Carlo Methods Appl.*, 3(2) :113–140, 1997.

[14] M. Bossy et D. Talay. Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles : Application to the Burgers equation. *Annals of Applied Prob.*, 6(3) :818–861, 1996.

[15] M. Bossy et D. Talay. A stochastic particle method for the McKean-Vlasov and the Burgers equation. *Math. Comp.*, 66(217) :157–192, 1997.

[16] Y. Brenier et E. Grenier. Sticky particles and scalar conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35 :2317–2328, 1998.

[17] M. Broadie et J. Detemple. American option valuation : New bounds, approximations, and a comparison of existing methods. *The Review of Financial Studies*, 9(4) :1211–1250, 1996.

[18] P. Calderoni et M. Pulvirenti. Propagation of chaos for Burgers' equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré Section A*, 39(1) :85–97, 1983.

[19] P. Carr. Randomization and the American put. *The review of Financial Studies*, 11(3) :587–626, 1998.

[20] F.P. Da Costa. Existence and uniqueness of density conserving solutions to the coagulation-fragmentation equations with strong fragmentation. *J. Math. Anal. Appl.*, 192 :892–914, 1995.

[21] M. Deaconu, N. Fournier et E. Tanré. A pure jump process associated with Smoluchowski's coagulation equation. *Preprint Institut Elie Cartan*, 2001.

[22] M. Deaconu, N. Fournier et E. Tanré. Study of a stochastic particle system associated with the Smoluchowski coagulation equation. *Preprint Institut Elie Cartan*, 2001.

[23] M. Deaconu et E. Tanré. Smoluchowski's coagulation equation : probabilistic interpretation of solutions for constant, additive, and multiplicative kernels. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Ser. IV*, 29(3) :549-580, 2000.

[24] A. Eibeck et W. Wagner. Stochastic particle approximations for Smoluchowski's coagulation equation. *Preprint WIAAS Berlin*, 2000.

[25] M. Escobedo, J.L. Vazquez et E. Zuazua. Asymptotic behavior and source-type solution for a diffusion-convection equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 124 :43–66, 1993.

[26] A.L. Fogelson. Particle-method solution of two-dimensional convection-diffusion equations. *Journal of Comp. Physics*, 100 :1–16, 1992.

[27] F. Guias. A Monte-Carlo approach to the Smoluchowski equations. *Monte Carlo Methods and Appl.*, 3(4) :313–326, 1997.

[28] M.A. Hulsen, A.P.G. van Heele et B.H.A.A. van den Brule. Simulation of viscoelastic flows using Brownian configuration fields. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 70 :79–101, 1997.

[29] M. Inoue. Construction of diffusion processes associated with a porous medium equation. *Hiroshima Math. J.*, 19 :281–297, 1989.

[30] M. Inoue. Derivation of a porous medium equation from many markovian particles and propagation of chaos. *Hiroshima Math. J.*, 21 :85–110, 1991.

[31] M.Z. Jacobson, R.P. Turco, E.J. Jensen et O.B. Toon. Modeling coagulation among particles of different composition and size. *Atmospheric Environment*, 28 :1327–1338, 1994.

[32] I. Jeon. Existence of gelling solutions for coagulation-fragmentation equations. *Commun.Math. Phys.*, 194 :541–467, 1998.

[33] N. Ju. Pricing an American option by approximating its early exercise boundary as a multipiece exponential function. *The Review of Financial Studies*, 11(3) :627–646, 1998.

[34] A. Kohatsu-Higa et S. Ogawa. Weak rate of convergence for an Euler scheme of nonlinear SDE's. *Monte Carlo Methods and Appl.*, 3(4) :327–345, 1997.

[35] M. Laso et H.C. Öttinger. Calculation of viscoelastic flow using molecular models : the CONNFFESSIT approach. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 47 :1–20, 1993.

[36] F. Leyvraz et H.R. Tschudi. Singularities in the kinetics of coagulation processes. *J. Phys. A :Math. Gen.*, 14 :3389–3405, 1981.

[37] D. Lépingle. Euler scheme for reflected stochastic differential equations. *Math. Comput. Simul.*, 38(1-3) :119–126, 1995.

[38] C. Marchioro et M. Pulvirenti. Hydrodynamics in two dimensions and vortex theory. *Comm. Math. Phys.*, 84 :483–503, 1982.

[39] H.P. McKean. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. *In Lecture Series in Differential Equations*, 7 :41–57, 1967.

[40] S. Méléard. A probabilistic proof of the vortex method for the 2d Navier-Stokes equations. *Annals of Applied Probability*, 10(4) :1197–1211, 2000.

[41] S. Méléard. Monte-Carlo approximations of the solution of the 2d Navier-Stokes equation with finite measure initial data. *To appear in Probab. Theory Relat. Fields.*

[42] S. Méléard et S. Roelly-Coppoletta. A propagation of chaos result for a system of particles with moderate interaction. *Stochastic Processes Appl.*, 26 :317–332, 1987.

[43] K. Oelschläger. A law of large numbers for moderately interacting diffusion processes. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, 69 :279–322, 1985.

[44] B. Perthame et M. Pulvirenti. On some large systems of random particles which approximate scalar conservation laws. *Asymt. Anal.*, 10(3) :263–278, 1995.

[45] B. Perthame et E. Tadmor. A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. *Comm. Math. Phys.*, 136 :501–517, 1991.

[46] L.C.G. Rogers. Monte Carlo valuation of American options. *Preprint*, 2001.

[47] L.C.R. Rogers and E.J. Stapelton. Fast accurate binomial pricing. *Finance Stochast.*, 2(1) :3–17, 1997.

[48] B. Roynette et P. Vallois. Instabilité de certaines equations différentielles stochastiques non linéaires. *Journal of Functional Analysis*, 130(2) :477–523, 1995.

[49] A. Sherman et M. Mascagni. A gradient random walk method for two-dimensional reaction-diffusion equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(6) :1280–1293, november 1994.

[50] T. Shiga et H. Tanaka. Central limit theorem for a system of markovian particles with mean field interactions. *Z. F. Warscheinlichkeitstheorie und Verw. Geb.*, 69 :439–459, 1985.

[51] R. Sizaire, G. Lielens, I. Jaumain, R. Keunings, et V. Legat. On the hysteretic behaviour of dilute polymer solutions in relaxation following extensional flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 82(2-3) :233–253, 1999.

[52] J. Spouge. An existence theorem for the discrete coagulation-fragmentation equations. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 96 :351–357, 1984.

[53] D.W. Stroock et S.R.S. Varadhan. *Multidimensional Diffusion Processes.* Springer, 1997.

[54] A.S. Sznitman. A propagation of chaos result for Burgers' equation. *Probability Theory and Related Fields*, 71 :581–613, 1986.

[55] A.S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. In *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XIX - 1989, Lect. Notes in Math. 1464*. Springer-Verlag, 1991.

[56] J.E. Zhang. A semi-analytical method for pricing and hedging continuously-sampled arithmetic average options. *J. Comput. Finance*, 5(1) :1–20, 2001.