Aléatoire PC 2 :

Benjamin Jourdain

Exercice 1.

1. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (densité $\lambda e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}$). Déterminer la loi de $1 + \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ (densité $1_{\{0<u<1\}}$).
   (a) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire U^α est elle-intégrable ? Que vaut alors son espérance ?
   (b) Déterminer la loi de $-\frac{1}{\lambda} \ln(U)$.

Exercice 2.
Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite (densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$).

1. Calculer $\mathbb{E}(|X|)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.
2. Déterminer la loi de X^2.

Exercice 3.
Soit X une variable aléatoire réelle positive de fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx$.

Exercice 4.
On considère un système constitué de n composants. On suppose que les durées de vie des composants sont des variables exponentielles $T_1, \ldots, T_n$ de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ et qu'elles sont indépendantes, ce qui implique en particulier que $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, les événements $\{T_1 \leq t_1\}, \ldots, \{T_n \leq t_n\}$ sont indépendants ainsi que les événements $\{T_1 > t_1\}, \ldots, \{T_n > t_n\}$.

1. On suppose que le système est en parallèle i.e. qu'il fonctionne lorsqu'un au moins des composants fonctionne. Exprimer sa durée de vie T en fonction des T_i. Déterminer la fonction de répartition de T et en déduire sa loi.
2. Même question dans le cas où le système est en série i.e. où il fonctionne seulement lorsque tous les composants fonctionnent.

Exercice 5.
Le cycle d'un feu de circulation est le suivant : le feu est vert sur l'intervalle $[0, v]$ et orange ou rouge sur $]v, v + r]$ avec $v, r > 0$. L'instant d'arrivée U d'un automobiliste est supposé uniformément réparti sur le cycle $[0, r + v]$.

1. Exprimer en fonction de U le temps T d'attente de cet automobiliste au feu dans le cas où aucun véhicule ne se trouve devant le feu à l'instant ou il arrive.
2. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que cette variable aléatoire n'est ni discrète, ni à densité.

Exercice 6.
Vous participez à un jeu où l'animateur tire un nombre uniformément sur $[0, 1]$, le note sur un premier ticket puis note son carré sur un second ticket. Il met les deux tickets dans une urne. Vous tirez au hasard un ticket dans l'urne. Vous avez le choix entre gagner le montant indiqué sur ce ticket et gagner le montant indiqué sur le ticket resté dans l'urne. Que faites-vous ?

Exercice 7.
Préciser comment simuler la loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ (densité $\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$) par la méthode d'inversion de la fonction de répartition.

Exercice 8.
Montrer que la probabilité de tomber sur une fève qui a la forme d'un disque de rayon r lors de la découpe d'un rayon d'une galette des rois de rayon $R > 2r$ est égale à

$$\frac{r^2}{2(R-r)^2} + \frac{r\sqrt{(R-r)^2 - r^2}}{\pi(R-r)^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{r}{R-r}\right).$$

Montrer que lorsque $r \to 0$ avec R fixé, cette probabilité est équivalente à $\frac{2r}{\pi R}$.
Indication : cette probabilité est égale à celle pour que la fève dont le centre est uniformément réparti sur le disque de rayon $R - r$ touche un rayon fixé de la galette.

Exercice 9.
Au cours d'un jeu télévisé, un candidat tire au sort entre 2 enveloppes contenant respectivement les sommes x_1 et x_2 ($x_1 > x_2 > 0$), qu'il ne connaît pas. Après avoir examiné le contenu X de son enveloppe, il a le choix entre conserver ce contenu et effectuer un échange avec l'autre enveloppe. On veut étudier la stratégie suivante : on se donne T une variable exponentielle de paramètre 1 indépendante du tirage au sort et on change d'enveloppe seulement lorsque $T > X$. Calculer la probabilité d'obtenir la somme la plus élevée x_1 en suivant cette stratégie. Est-elle supérieure ou inférieure à $1/2$? Trouvez-vous ce résultat intuitif ?