Aléatoire PC 3 :

Benjamin Jourdain

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable centrée (i.e. telle que $\mathbb{E}(X) = 0$) et $a > 0$.

1. Montrer que $a \leq \mathbb{E}\left((a - X)1_{\{X<a\}}\right) \leq \sqrt{\mathbb{P}(X < a)} \times \sqrt{\text{Var }(X) + a^2}$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\text{Var }(X)}{\text{Var }(X)+a^2}$ et comparer avec la majoration obtenue par l'inégalité de Bienaymé Chebychev.

Exercice 2. On suppose que la densité du vecteur aléatoire (X, Y) se met sous la forme $g(x)h(y)$. Vérifier que X et Y sont indépendantes et préciser leurs densitésrespectives.

Exercice 3.
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur aléatoire de carré intégrable de matrice de variance covariance

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Trouver $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $A \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. En déduire que X_3 est, à une constante additive près, combinaison linéaire de X_1 et X_2. Le vecteur X peut-il posséder une densité ?

Exercice 4.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées respectivement suivant les lois gamma de paramètre (a, θ) (densité : $1_{\{x>0\}} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}$ où $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$) et de paramètre (b, θ) avec $a, b, \theta > 0$. Quelle est la loi de $(S, Z) = (X + Y, \frac{X}{X+Y})$? Les variables aléatoires S et Z sont-elles indépendantes ? Quelle est la loi de S ?

Exercice 5.
Les durées de vie S et T de deux machines suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs α et β et sont indépendantes.

1. Quelle est la loi du couple $(X, Y) = (\min(S, T), |T - S|)$? (On rappelle que $|T - S| = \max(S, T) - \min(S, T)$.)
2. On suppose maintenant que $\beta = \alpha$.
   Quelle est la loi de $(Z, W) = (S + T, S - T)$? Les variables aléatoires Z et W sont elles indépendantes ? Préciser la loi de Z et celle de W.

Exercice 6. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles I.I.D. de densité f et $Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n$ le réordonnement croissant des X_i aussi appelé statistique d'ordre.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\exists 1 \leq i \neq j \leq n : \; X_i = X_j) = 0$.

Ce résultat signifie que, presque sûrement, les n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont distinctes. On peut alors les classer par ordre croissant d'une manière unique et ainsi définir une variable aléatoire Θ à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\mathbb{P}(X_{\Theta(1)} < X_{\Theta(1)} < \ldots < X_{\Theta(n)}) = 1$.

2. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, quelle est la loi de $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$?
3. Conclure que $(Y_1, \ldots, Y_n)$ possède la densité $n! 1_{\{y_1<y_2<\ldots<y_n\}} \prod_{i=1}^n f(y_i)$.

Exercice 7.
On coupe un bâton de longueur 1 au hasard en trois morceaux : les abscisses U et V des découpes sont supposées indépendantes et uniformément réparties sur $[0, 1]$. Calculer la probabilité pour que l'on puisse faire un triangle avec les trois morceaux (on peut faire un triangle avec trois segments de longueur l_1, l_2 et l_3 ssi $l_1 \leq l_2 + l_3$, $l_2 \leq l_3 + l_1$ et $l_3 \leq l_1 + l_2$).

Exercice 8.
Une cerise est placée sur la circonférence d'un gateau rond que l'on partage en 2 au hasard en pratiquant deux découpes suivant des rayons.
Si on prend la position de la cerise comme origine des angles, les positions U et V des deux coups de couteau sont des variables uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$ indépendantes. Exprimer la taille T de la part contenant la cerise, calculer son espérance puis déterminer la probabilité pour cette part soit plus grosse que l'autre. Quelle doit être la décision d'un gourmand qui doit choisir entre la part avec la cerise et la part sans la cerise avant le découpage ?

Exercice 9. Pour $\alpha > 0$, soient U de loi uniforme sur $[0, 1]$, ε de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{1+\alpha}$ et X de densité $\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} 1_{\{x>1\}}$ indépendantes.

1. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire que X a même loi que $U^{-1/\alpha}$.
2. Déterminer la loi de $Y = XU$.
3. Vérifier que $Z = \varepsilon X + (1 - \varepsilon)U$ a même loi que Y.