Aléatoire PC 4 :

Benjamin Jourdain

Exercice 1.
Soit R une variable exponentielle de paramètre $1/2$ et Θ une variable uniforme sur $[0, 2\pi]$ indépendantes.

1. Quelle est la loi de $(X, Y) = (\sqrt{R}\cos(\Theta), \sqrt{R}\sin(\Theta))$? Comment simuler un couple de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes à partir de deux variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes U_1 et U_2 ?
2. Quelle est la loi de $a\frac{W}{Z}$ où $a > 0$ et Z et W sont deux gaussiennes centrées réduites indépendantes ? Et celle de l'inverse d'une variable de Cauchy de paramètre a de densité $x \mapsto \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$?

Exercice 2.
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et $S = X + Y$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $S = s$ et en déduire $\mathbb{E}(X|S)$ lorsque X et Y suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Reprendre cette question lorsque X et Y suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3.
Pour $n \geq 2$, soient $U_1, \ldots, U_n$ des variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes et $(X, Y) = (\min_{1\leq i\leq n} U_i, \max_{1\leq i\leq n} U_i)$. Pour $0 \leq x \leq y \leq 1$, calculer $\mathbb{P}(x < X, Y \leq y)$. En déduire la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ puis $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 4. : Simulation suivant la loi béta
Soit $a, b > 0$ et (U, V) de la loi uniforme sur le domaine $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u > 0,\ v > 0,\ u^{\frac{1}{a}} + v^{\frac{1}{b}} < 1\}$ (i.e. (U, V) possède la densité $1_{\{(u,v)\in D\}}/|D|$ où $|D|$ est la surface de D)

1. Déterminer la loi de $(S, X) = \left(U^{\frac{1}{a}} + V^{\frac{1}{b}}, \frac{U^{\frac{1}{a}}}{U^{\frac{1}{a}}+V^{\frac{1}{b}}}\right)$.
2. Vérifier que X suit la loi béta de paramètres a et b. Les variables aléatoires S et X sont-elles indépendantes ? Que vaut $|D|$?

Exercice 5. Soit $((X_i, Y_i))_{i\geq 1}$ une suite I.I.D. avec X_1 et Y_1 variables exponentielles de paramètre 1 indépendantes. On se donne également indépendamment de cette suite une variable ε t.q. $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$ et on pose

$$N = \inf\{i \geq 1 :\ 2Y_i \geq (1 - X_i)^2\} \text{ et } Z = \varepsilon X_N.$$

1. Quelle est la loi de N ? Donner $\mathbb{E}(N)$.
2. Quelle est la loi de X_N ? En déduire celle de Z.
3. En déduire une méthode pour simuler une variable distribuée suivant la loi normale centrée réduite.

Exercice 6. : Simulation suivant la loi de Poisson

1. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables exponentielles de paramètre $\lambda > 0$ indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
   (a) Quelle est la loi du couple (S_n, X_{n+1}) ?

(b) En déduire que $\mathbb{P}(S_n \leq 1 < S_n + X_{n+1}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$.

(c) Calculer $\mathbb{P}(1 < X_1)$.

2. En déduire que si $(U_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, $\min\{n \in \mathbb{N} :\ U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_{n+1} < e^{-\lambda}\}$ suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 7. : Simulation suivant la loi gamma

On rappelle que pour $a, \theta > 0$, la densité de la loi $\Gamma(a,\theta)$ est $p_{a,\theta}(z) = \frac{\theta^a z^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\theta z} 1_{\{z>0\}}$ où pour $a > 0$, $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$. On suppose dans la suite que $a > 1$ et on note $f(z) = z^{a-1}e^{-z}1_{\{z>0\}}$ et $\mathcal{D}_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{f(\frac{y}{x})}\}$.

1. Calculer $\sup_{z>0} f(z)$ et $\sup_{z>0} z^2 f(z)$. En déduire que $\mathcal{D}_a \subset [0, x_a] \times [0, y_a]$ où $x_a = \left(\frac{a-1}{e}\right)^{\frac{a-1}{2}}$ et $y_a = \left(\frac{a+1}{e}\right)^{\frac{a+1}{2}}$.
2. Soit $(X,Y) \sim \mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ un couple uniformément réparti sur $\mathcal{D}_a$ i.e. qui possède la densité $\frac{1}{|\mathcal{D}_a|}1_{\{0\leq y\}}1_{\{0\leq x\leq\sqrt{f(\frac{y}{x})}\}}$ où $|\mathcal{D}_a|$ désigne la surface de $\mathcal{D}_a$.

   Quelle est la loi de (X,W) où $W = \frac{Y}{X}$? Donner la loi de W. En déduire que $|\mathcal{D}_a| = \frac{\Gamma(a)}{2}$. Conclure que $Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W}{\theta} \sim \Gamma(a,\theta)$.
3. Comment simuler suivant les lois $\mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ et $\Gamma(a,\theta)$?
4. On vient de voir que pour simuler suivant la loi $\Gamma(a,1)$, il n'y a pas besoin de connaître la constante $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \Gamma(a)$ qui permet de normaliser f en $p_{a,1}$. Est-ce que remplacer f par cf où $c \in]0,+\infty[$ dans la méthode ci-dessus change son efficacité ?

Exercice 8. Borne de Letac pour la méthode du rejet

Soit p une densité de probabilité sur l'intervalle $[0,1]$ suivant laquelle on souhaite simuler en utilisant un algorithme de rejet construit à l'aide d'une suite $((U_i, X_i))_{i\geq 1}$ de vecteurs aléatoires i.i.d. où les U_i sont uniformément réparties sur $[0,1]$. Plus précisément, on suppose qu'il existe un ensemble d'acceptation $\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}((U_1,X_1) \in \mathcal{A}) > 0$ et que la loi conditionnelle de U_1 sachant $(U_1,X_1) \in \mathcal{A}$ possède la densité p. On note $N = \min\{i \geq 1 : (U_i,X_i) \in \mathcal{A}\}$ et B un sous-ensemble borélien de $[0,1]$.

1. Quelle est la loi de N ? Et celle de U_N ?
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(U_n \in B, N \geq n) = \mathbb{P}(U_n \in B)\mathbb{P}(N \geq n)$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(U_N \in B) \leq \mathbb{P}(U_1 \in B)\mathbb{E}(N)$.
4. Conclure que $\mathbb{E}(N) \geq \sup\{\rho \geq 0 : \int_0^1 1_{\{p(u)\geq\rho\}}du > 0\}$.