Aléatoire PC 5 :

Benjamin Jourdain

Exercice 1. Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles I.I.D. et de carré intégrable, $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ et $V_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2 - (\bar{X}_n)^2$.

1. Montrer que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une limite à préciser. Converge-t-elle en moyenne vers cette limite ?
2. Montrer que $\mathbb{E}(V_n) = \frac{n-1}{n}\text{Var }(X_1)$. Comme l'espérance de V_n est différente de Var (X_1), on dit que V_n est un estimateur biaisé de Var (X_1). En revanche, $S_n^2 = \frac{n}{n-1}V_n$ est un estimateur sans biais.

Exercice 2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables I.I.D. suivant la loi uniforme sur $[0,\theta]$ où $\theta > 0$. On pose $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Pour $n \geq 1$, calculer la fonction de répartition de Y_n. En déduire que la suite Y_n converge en probabilité vers θ. Converge-t-elle presque sûrement ? (on pourra s'intéresser à la monotonie de $(Y_n)_n$.)
2. Donner la loi de Y_n et calculer $\mathbb{E}(Y_n)$, $\text{Var}(Y_n)$ et $\mathbb{E}((Y_n-\theta)^2)$.
   Vérifier que Y_n converge en moyenne quadratique vers θ et retrouver qu'elle converge également presque sûrement vers cette limite.
3. Montrer que Y_n a même loi que $\theta U^{\frac{1}{n}}$ où $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ et vérifier que $n(\theta - \theta U^{\frac{1}{n}})$ converge presque sûrement vers une limite à préciser.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles (i.e. t.q. $\mathbb{P}(|X_n| < +\infty) = 1$). Montrer qu'il exite une suite $(c_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\frac{X_n}{c_n} \xrightarrow{p.s.} 0$.

Exercice 4. Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires centrées de carré intégrable indépendantes et $(c_j)_{j\geq 1}$ une suite décroissante de réels strictement positifs. Pour $n \leq m$ deux entiers, on pose $Y = \sum_{j=n}^{m-1}(c_j^2 - c_{j+1}^2)(X_1 + \ldots + X_j)^2 + c_m^2(X_1 + \ldots + X_m)^2$.

1. Vérifier que $\mathbb{E}(Y) = c_n^2\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j^2) + \sum_{j=n+1}^m c_j^2\mathbb{E}(X_j^2)$.
2. Pour $k \in \{n, n+1, \ldots, m\}$ et $\varepsilon > 0$, on pose $A_k = \{c_k|X_1 + \ldots + X_k| \geq \varepsilon\}$ et $B_k = A_k \cap \bigcap_{j=n}^{k-1} A_j^c$. Vérifier que pour $j \geq k$, $\mathbb{E}((X_1 + \ldots + X_j)^2|B_k) \geq \frac{\varepsilon^2}{c_k^2}$. En déduire que $\mathbb{E}(Y|B_k) \geq \varepsilon^2$.
3. Vérifier que $\sum_{k=n}^m \mathbb{E}(Y|B_k)\mathbb{P}(B_k) \leq \mathbb{E}(Y)$ et conclure à l'inégalité de Hajek Renyi : $\mathbb{P}\left(\max_{n\leq k\leq m} c_k|X_1 + \ldots + X_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left(c_n^2\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j^2) + \sum_{j=n+1}^m c_j^2\mathbb{E}(X_j^2)\right)$.
4. On pose $\bar{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k X_j$ et on suppose que $\sum_{j\in\mathbb{N}^*}\frac{\text{Var }(X_j)}{j^2} < +\infty$. Montrer que $\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j^2) \to 0$ lorsque $n\to\infty$ et en déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\{\max_{k\geq n}|\bar{X}_k| \geq \varepsilon\}\right) = 0$. Conclure que $\bar{X}_k$ converge presque sûrement vers 0 lorsque $k\to\infty$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{n})$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $l \geq m$, vérifier que $\mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^l\{X_n = 0\}) = e^{\sum_{n=m}^l \ln(1-\frac{1}{n})}$. En remarquant que pour $x \in]0,1[$, $\ln(1-x) < -x$, en déduire que $\lim_{l\to\infty}\mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^l\{X_n = 0\}) = 0$ puis que $\mathbb{P}(\bigcap_{n\geq m}\{X_n = 0\}) = 0$ et enfin que $\mathbb{P}(\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m}\{X_n = 0\}) = 0$. Conclure que $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 0$.

Exercice 6. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi que X. On suppose d'abord que X est intégrable.

1. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$. Exprimer $\frac{X_k}{k}$ à l'aide de $\bar{X}_k$ et $\bar{X}_{k-1}$ et en déduire que si les X_j sont indépendantes, alors $\frac{X_k}{k}$ converge presque sûrement vers 0 lorsque k tend vers l'infini.
2. On suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq j)$. En déduire que pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_k}{k} \geq \frac{1}{m}\right) < +\infty$ puis que $\frac{X_k}{k}$ converge presque sûrement vers 0 lorsque k tend vers l'infini.
3. Dans les deux cas précédents, conclure que $\frac{1}{n}\max(X_1, \ldots, X_n)$ converge presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On suppose maintenant que X est une variable aléatoire réelle t.q. $\mathbb{E}(\max(X, 0)) < +\infty$.

4. Montrer que $\frac{1}{n}\max(X_1, \ldots, X_n)$ converge presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 7. Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. t.q. $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(|X_1| > n) = 0$.

1. En remarquant que $X_1^2 1_{\{|X_1|\leq n\}} \leq \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^k 2j) 1_{\{k-1<|X_1|\leq k\}}$, montrer que
$$\mathbb{E}[X_1^2 1_{\{|X_1|\leq n\}}] \leq 2\sum_{j=1}^n j\mathbb{P}(|X_1| > j-1).$$
2. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j 1_{\{|X_j|\leq n\}}\right) = 0$.

On suppose l'existence de $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_1 1_{\{|X_1|\leq n\}}] = x$.

3. Pour $\varepsilon > 0$ et n assez grand pour que $|\mathbb{E}[X_1 1_{\{|X_1|\leq n\}}] - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, vérifier que
$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - x| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j 1_{\{|X_j|\leq n\}} - \mathbb{E}[X_1 1_{\{|X_1|\leq n\}}]\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + n\mathbb{P}(|X_1| > n).$$
Conclure que $(\bar{X}_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers x lorsque $n \to \infty$.
4. Donner un exemple de variable aléatoire X_1 non intégrable de loi symétrique (i.e. X_1 et $-X_1$ ont même loi) telle que $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(|X_1| > n) = 0$.

Exercice 8. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et pour $x \in [0,1]$, soit $S_n^x \sim \mathcal{B}(n, x)$.

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}(|f(S_n^x/n) - f(x)|) \leq 2\sup_{y\in[0,1]} |f(y)|\mathbb{P}\left(|S_n^x/n - x| \geq \alpha\right) + \sup_{\substack{y,z\in[0,1]\\|y-z|\leq\alpha}} |f(y) - f(z)|.$$
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev, en déduire que lorsque $n \to +\infty$, $f(S_n^x/n)$ converge en moyenne vers $f(x)$ uniformément pour $x \in [0,1]$.
3. Conclure que f est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes (théorème de Weierstrass).