Aléatoire PC 6 :

Benjamin Jourdain

Exercice 1.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes t.q. $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Calculer la fonction caractéristique de $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$. En remarquant que

$$\sin(u/2^n) \prod_{k=1}^n \cos(u/2^k) = \sin(u)/2^n,$$

en déduire que la suite Y_n converge en loi vers Y de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Exercice 2.
Soit Y une variable aléatoire réelle de loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$ (densité : $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$).

1. Calculer la fonction caractéristique Φ_Y.
2. En déduire la fonction caractéristique d'une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy de paramètre λ (densité $u \mapsto \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+u^2)}$).
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. suivant la loi de Cauchy. Quelle est la loi de la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$? Commenter.

Exercice 3. : élections
Lors du second tour de l'élection présidentielle, un sondage est effectué à la sortie des urnes sur un échantillon de 1 000 personnes. Le candidat A recueille a% (a proche de 50) des suffrages des personnes interrogées. A l'aide du théorème de la limite centrale, donner un intervalle de confiance à 95% pour le score S_A réalisé par ce candidat. A partir de quelle valeur de $|a - 50|$, peut-on se baser sur le sondage pour connaître le résultat de l'élection ?

Exercice 4.
Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires I.I.D. suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$).

1. Calculer ϕ_{X_1} et en déduire la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.

On suppose désormais que $\lambda = 1$.

2. Quelle est la limite de la suite $u_n = e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ lorsque $n \to +\infty$ (*Indication :* on pourra utiliser le théorème de la limite centrale) ?
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-\right]$ et $\mathbb{E}[G^-]$ où $G \sim \mathcal{N}_1(0, 1)$.
   (b) Pour $M > 0$, justifier que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\min\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-, M\right)\right] = \mathbb{E}\left[\min(G, M)\right]$.
   (c) Montrer que pour X une variable aléatoire réelle de carré intégrable et $M > 0$, $\mathbb{E}\left[(X^- - M)^+\right] \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{M}$. En remarquant que $x = \min(x, M) + (x - M)^+$, en déduire que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-\right] = \mathbb{E}[G^-]$ et retrouver la formule de Stirling $n! \sim \frac{(n/e)^n}{\sqrt{2\pi n}}$ pour $n \to \infty$.

Exercice 5. : arrondis
Dans un ordinateur, les nombres réels sont représentés par des multiples d'une certaine précision $\varepsilon > 0$. Nous disposons de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans l'ordinateur, de sources variées (calculs antérieurs ...), dont nous effectuons la somme $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Nous voulons évaluer l'erreur d'arrondi A_n faite ; en appelant D_i l'erreur d'arrondi sur x_i (dont la "vraie" valeur est $x_i - D_i$) nous avons $A_n = D_1 + \cdots + D_n$.

1. L'ordinateur se contente de tronquer les résultats à la précision voulue. Nous supposons alors les v.a. D_i i.i.d. uniformes sur $]-\varepsilon, 0]$. Quelle est l'asymptotique de A_n pour n grand ? Pour $\varepsilon = 10^{-16}$, à partir de quel n ne peut-on plus garantir une précision de 10^{-12} sur s_n ?
2. L'ordinateur fait un véritable calcul d'arrondi. Nous supposons alors les D_i i.i.d. uniformes sur $]-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$. Quelle est l'asymptotique de A_n pour n grand ? Pour $\varepsilon = 10^{-16}$, à partir de quel n ne peut-on plus garantir d'avoir avec probabilité supérieure à 99% une précision de 10^{-12} sur s_n ?

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs $\mathbb{R}^d$ qui converge en loi vers X et $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs $\mathbb{R}^{d'}$ qui converge en loi vers la constante y.

1. À l'aide de la fonction caractéristique, montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers (X, y).
2. Lorsque $d = d'$, en déduire que $X_n + Y_n$ et $X_n.Y_n$ convergent respectivement en loi vers $X + y$ et $X.y$.

Exercice 7.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes t.q. $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Calculer la fonction caractéristique $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{2k}\ X_k$. Donner le développement limité à l'ordre 2 à l'origine de la fonction $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \ln(\cos(x))$. En déduire pour $u \in \mathbb{R}$ la limite de $\ln(\Phi_{Z_n}(u))$ lorsque n tend vers l'infini et conclure que la suite Z_n converge en loi vers une limite à préciser.

Exercice 8. Soit $(Z_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Pareto symétrique de paramètre $\alpha \in]0, 2[$ de densité $\frac{\alpha}{2|z|^{\alpha+1}} 1_{\{|z|\geq 1\}}$.

1. Lorsque $\alpha > 1$, que peut-on dire de la suite $\bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j$ lorsque $n \to +\infty$?
2. Vérifier que la fonction caractéristique Φ commune aux Z_j est telle que
$$\Phi(u) - 1 = \alpha|u|^\alpha \int_{|u|}^{+\infty} \frac{\cos(t) - 1}{t^{\alpha+1}} dt$$
3. Donner un équivalent de $\Phi(u) - 1$ pour u au voisinage de 0. En déduire que $n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \bar{Z}_n$ converge en loi. À quelle vitesse la moyenne empirique $\bar{Z}_n$ converge t-elle vers 0 lorsque $1 < \alpha < 2$?

Exercice 9.
Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et indentiquement distribuées suivant une densité $p(x)$ paire, bornée, continue en 0 et telle que $p(0) > 0$

1. Quelle est la loi de $Y_k = \frac{1}{X_k}$?
2. Montrer que la fonction caractéristique Φ commune aux Y_k vérifie
$$\Phi(u) - 1 = 2|u| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(z) - 1}{z^2} p\left(|u|/z\right) dz.$$
On rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(z)}{z^2}\, dz = \frac{\pi}{2}$. Vérifier que $\Phi(u) = 1 - \pi p(0)|u| + o(u)$ pour $u \to 0$.
3. En déduire que $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k$ converge en loi vers Y qui suit la loi de Cauchy de paramètre $\pi p(0)$.
4. Conclure que la moyenne harmonique $n/\sum_{k=1}^n \frac{1}{X_k}$ des X_k converge en loi vers une limite que l'on précisera.