Aléatoire PC 7 :

Benjamin Jourdain

Exercice 1. Soit X et Y des variables gaussiennes réelles indépendantes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les variables $X+Y$ et $X-Y$ soient indépendantes.

Exercice 2. Soit X une variable gaussienne centrée réduite et ε une variable vérifiant $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$ indépendantes.

1. Quelle est la loi de $Y = \epsilon X$?
2. Donner la matrice de covariance et la fonction caractéristique du vecteur (X, Y). Ce vecteur est-il gaussien ?

Exercice 3. Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs $\mathbb{R}^d$ i.i.d. de carré intégrable. On note respectivement $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\Gamma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ leurs vecteur espérance et matrice de covariance communs. Pour $u \in \mathbb{R}^d$, on pose $Y_k = u.X_k$. On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ et $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k$. Calculer $\mathbb{E}(Y_k)$ et Var (Y_k). Quel est le comportement asymptotique de $\sqrt{n}(\bar{Y}_n - u.\mu)$? En déduire la limite de $\Phi_{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}(u)$ lorsque $n \to \infty$. Conclure que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ converge en loi vers une limite à préciser.

Exercice 4. Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles I.I.D. et de carré intégrable t.q. Var $(X_1) > 0$ et $\exists c > 0$, $\frac{X_1+X_2}{c} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1$.

1. Déterminer c à l'aide d'un calcul de variance puis en déduire l'espérance commune des X_i ?
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire de la loi $\frac{X_1+\ldots+X_{2^k}}{2^{k/2}}$?
3. En déduire que les X_j sont des variables gaussiennes.

Exercice 5. Soit $(G_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi normale centré réduite.

1. Déterminer la loi de G_1^2. En déduire sans calcul celle de $G_1^2 + \ldots + G_n^2$ appelée loi du χ^2 à n degrés de liberté.
2. Montrer que $T_n = \frac{G_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n G_j^2}}$ possède la densité $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ appelée densité de Student de paramètre n. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $|T_n|^\alpha$ est-elle intégrable ?
3. Quel est le comportement asymptotique de T_n lorsque $n \to \infty$?

Exercice 6.
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires I.I.D. suivant la loi $\mathcal{N}_1(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ et $S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2}$.

1. Quelle est la loi de $\bar{X}_n$? Quelle est celle de $Y = {}^t(\frac{X_1-\mu}{\sigma}, \ldots, \frac{X_n-\mu}{\sigma})$?
2. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que $e_1 = {}^t(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}})$ et $O = {}^t(e_1, \ldots, e_n)$. Quelle est la loi de $Z = OY$?
3. Vérifier que $\frac{n-1}{\sigma^2}S_n^2 = \sum_{j=2}^n Z_j^2$. En déduire que cette variable est indépendante de $\bar{X}_n$ et suit la loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté. Quelle est la loi de $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\mu}{S_n}$?

Exercice 7. Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles I.I.D. et de carré intégrable.

1. Montrer que $\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)), \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=n+1}^{2n} (X_j - \mathbb{E}(X_1))\right)$ converge en loi vers (Y_1, Y_2) avec Y_1 et Y_2 I.I.D. de loi à préciser.
2. En déduire que $\sqrt{2n}(\bar{X}_{2n} - \mathbb{E}(X_1)) - \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1))$ converge en loi vers $\sqrt{2-\sqrt{2}}Y_1$.
3. Montrer que lorsque la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une limite Z, $Z_{2n} - Z_n$ converge en probabilité vers 0.
4. Conclure que, lorsque Var $(X_1) > 0$, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1))$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 8. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.

1. Pour $\alpha > 0$, quelle est la limite de $\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - p| \leq \alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ lorsque n tend vers l'infini ?
2. Montrer que l'événement $\left\{|\bar{X}_n - p| \leq \alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\}$ s'écrit aussi $\{p \in [\rho_1, \rho_2]\}$ où on exprimera ρ_1 et ρ_2 en fonction de n, $\bar{X}_n$ et α (*Indication :* on pourra commencer par écrire cet événement sous la forme $\{Q(p) \leq 0\}$ avec Q un polynôme du second degré).

Exercice 9. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles I.I.D. et de carré intégrable telles que la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$ sont indépendantes.

1. Vérifier que $S_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^n X_j^2 - \dfrac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{j,k=1\\k\neq j}}^n X_j X_k$ et en déduire $\mathbb{E}(S_n^2)$.
2. En utilisant l'hypothèse d'indépendance, exprimer $\mathbb{E}(S_n^2 e^{iun\bar{X}_n})$ en fonction de Var (X_1) et de la fonction caractéristique commune des X_j que l'on notera Φ_X.
3. Montrer par ailleurs que
$$\mathbb{E}(S_n^2 e^{iun\bar{X}_n}) = \mathbb{E}(X_1^2 e^{iuX_1})\Phi_X(u)^{n-1} - (\mathbb{E}(X_1 e^{iuX_1}))^2 \Phi_X(u)^{n-2}.$$
4. Remarquer que $\mathbb{E}(X_1 e^{iuX_1})$ et $\mathbb{E}(X_1^2 e^{iuX_1})$ s'expriment simplement à l'aide des deux premières dérivées de Φ_X et en déduire une équation différentielle satisfaite par cette fonction.
5. Poser $f(u) = \Phi'_X(u)/\Phi_X(u)$ et calculer $f'(u)$. En déduire Φ_X puis la loi commune des X_j.