Aléatoire PC 9 :

Benjamin Jourdain

Exercice 1.
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires entières i.i.d. et N une variable aléatoire entière indépendante. On pose

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i \text{ si } N \geq 1 \\ 0 \text{ si } N = 0. \end{cases}$$

1. Comment s'exprime la fonction génératrice G_S à partir de G_N et G_{X_1} ?
2. Exprimer l'espérance et la variance de S en fonction de celles de X_1 et de N.
3. Quelle est la loi de S lorsque les X_i sont géométriques de paramètre p et N géométrique de paramètre q ?

Exercice 2. Soit $0 < a < 1 < b$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires I.I.D. à valeurs dans $\{a, b\}$ et d'espérance 1. On pose $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

1. En remarquant que pour $x \in]0, \infty[\setminus\{1\}$, $\ln(x) < x - 1$, vérifier que $\mathbb{E}(\ln(X_1)) < 0$. Montrer que la suite Y_n converge presque sûrement vers une limite que l'on précisera. Un joueur joue tous les jours le dixième de sa fortune à pile ou face avec un ami. Quelle est l'évolution de cette fortune au bout d'un temps très long ?
2. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$. La suite Y_n converge-t-elle en moyenne ?
   La variable aléatoire $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} Y_n$ est-elle intégrable ?

Exercice 3.
Soit $(U_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables I.I.D. suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ et $\alpha > 0$.

1. Montrer que la suite $X_n = (U_1 \times \ldots \times U_n)^{\frac{\alpha}{n}}$ converge presque sûrement et donner sa limite.
   Indication : on pourra s'intéresser à $\ln(X_n)$.
2. On pose $Y_n = e^{\alpha\sqrt{n}}(U_1 \times \ldots \times U_n)^{\alpha/\sqrt{n}}$.
   Quel est le comportement de la suite $\frac{1}{\alpha}\ln(Y_n)$ pour $n \to +\infty$?
   En déduire que la suite Y_n converge en loi et déterminer la loi de sa limite.

Exercice 4.
On considère une molécule d'ADN dont la longueur L supposée aléatoire possède une densité p sur $\mathbb{R}_+$. La molécule se casse en un point supposé uniformément réparti sur sa longueur. Les longueurs des deux morceaux obtenus sont

$$X = LU \quad \text{et } Y = L(1 - U),$$

où U est une variable uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de L.

1. Quelle est la loi de (X, Y) ?
2. À quelle condition sur la densité p, supposée continue sur $\mathbb{R}_+^*$, les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5.
On modélise les deux premiers instants de remplacement d'une ampoule électrique par un vecteur aléatoire (X, Y) de densité $e^{-y}1_{\{0<x<y\}}$.

1. Donner les lois des variables X et Y. Sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
2. Soit $W = Y - X$. Donner la loi du couple (X, W).
3. Soit $Z = X/Y$. Donner la loi du couple (Z, W).

Exercice 6.
Soit $\lambda > 0$ et pour $n \geq \lambda$, X_n une variable géométrique de paramètre λ/n. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Calculer la fonction caractéristique Φ_{Y_n} et en déduire que la suite $(Y_n)_n$ converge en loi vers une limite à préciser.

Exercice 7.
Pour $\alpha > 0$, soient U de loi uniforme sur $[0, 1]$, ε de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{1+\alpha}$ et X de densité $\frac{\alpha}{x^{1+\alpha}} 1_{\{x>1\}}$ indépendantes.

1. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire que X a même loi que $U^{-1/\alpha}$.
2. Déterminer la loi de $Y = XU$.
3. Vérifier que $Z = \varepsilon X + (1 - \varepsilon)U$ a même loi que Y.

Exercice 8.
Soient U et V deux variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes et $Y = U - V$. Donner la loi conditionnelle de U sachant $Y = y$ et calculer $\mathbb{E}(U|Y)$.