

Workshop on granular materials, November 19-21 2007, ENPC

## Derivation of a thin layer model for fluid/solid transition

François BOUCHUT

CNRS & DMA

Ecole Normale Supérieure

Paris

*and*

E.D. Fernández-Nieto, A. Mangeney, P.-Y. Lagrée

## Context

Description of dense granular materials by Savage-Hutter type modelling.

Approach of Bouchut, Mangeney, Perthame, Vilotte, Westdickenberg:

- ▷ Derivation from incompressible d'Euler equations with free boundary
- ▷ Profile in normal variable that allows exact hydrostatic solutions in case of constant slope
- ▷ Energy identity, thus well-posedness and stable numerical computation
- ▷ Exact steady-states

## References: Savage-Hutter type models for granular avalanches

- ▷ S.B. Savage, K. Hutter, *The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to run-out*, Acta Mech. 86 (1991), 201-223.
- ▷ J.M.N.T. Gray, M. Wieland, K. Hutter, *Gravity driven free surface flow of granular avalanches over complex basal topography*, Proc. R. Soc. Lond. A 455 (1999), 1841-1874.
- ▷ F. Bouchut, A. Mangeney-Castelnau, B. Perthame, J.-P. Vilotte, *A new model of Saint Venant and Savage-Hutter type for gravity driven shallow water flows*, C.R. Acad. Sci. Paris, série I 336 (2003), 531-536.
- ▷ F. Bouchut, M. Westdickenberg, *Gravity driven shallow water models for arbitrary topography*, Comm. in Math. Sci. 2 (2004), 359-389.

## Our problem

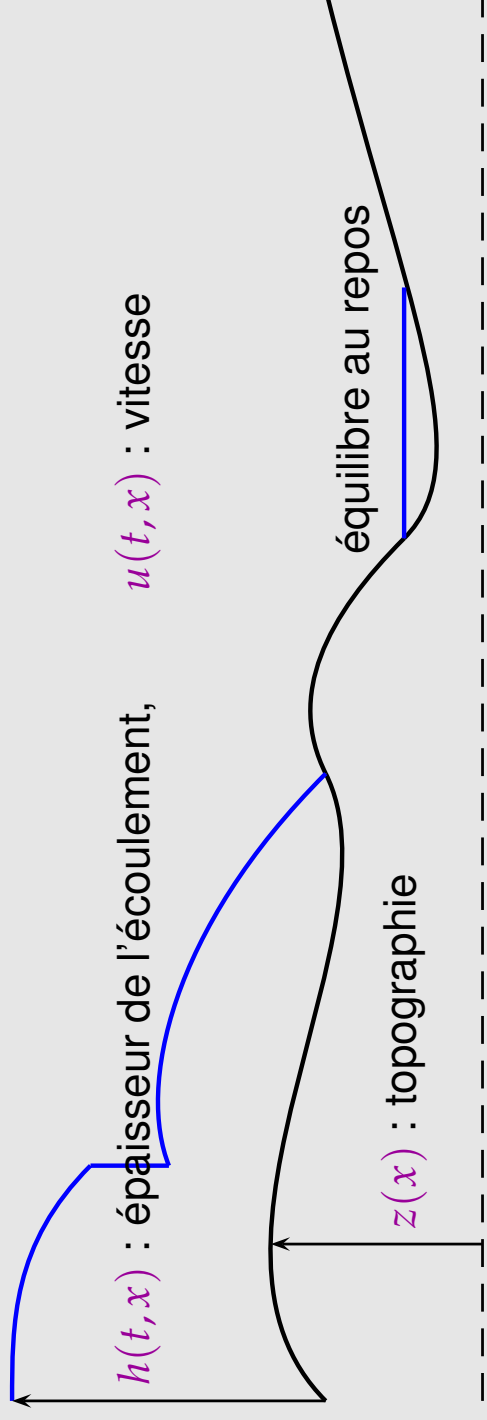
**Context:** mass of granular material made of two layers,

- ▷ the upper layer is flowing
- ▷ the lower layer is at rest
- ▷ the interface between them is time dependent
- ▷ particles moving can stop, particles at rest can start (making the interface move). **Single type of particles.**
- ▷ the density in each layer is constant

**Question:** can we derive an equation for the evolution of the interface?

## Les modèles de type Savage et Hutter

**Contexte** : écoulement unidimensionnel d'un fluide (eau dans une rivière) ou d'un milieu granulaire dense (sable, lave de volcan) sur une pente régulière.

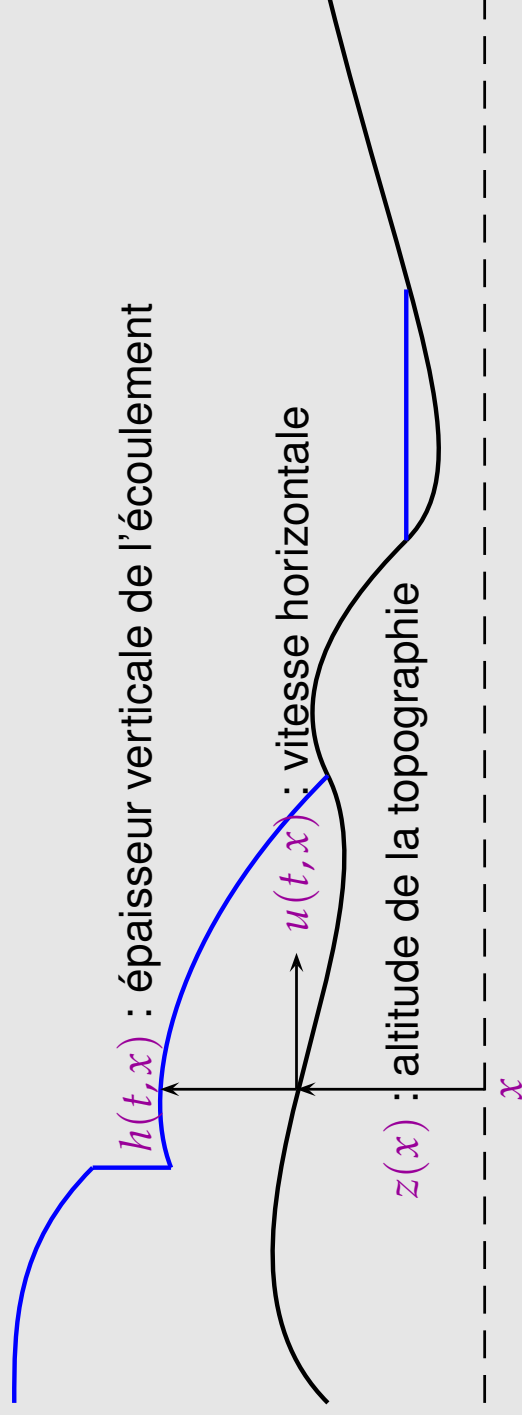


Equations sur  $h$  et  $u$  ?

- ▷ Des hypothèses sont nécessaires pour dériver un modèle, à partir d'un système de Navier-Stokes. En particulier, il faut une couche mince,  $h \ll L$  dimension typique des phénomènes à étudier.
- ▷ Hypothèses sur la topographie  $z$  pour simplifier les équations,
- ▷ Modélisation des phénomènes de friction,
- ▷ Modélisation des mélanges (ex. avalanche solide/liquide)

# Le modèle de Saint Venant (shallow water) pour les rivières

La coordonnée  $x$  est mesurée horizontalement.



Les équations sont

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + ghz_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

avec  $g$  constante de la gravitation,  $z_x = dz/dx$  est la pente.  
Hypothèse essentielle en plus de couche mince :  **pente faible**  $z_x \ll 1$ .

## Le modèle de Saint Venant : propriétés

Propriétés du modèle de Saint Venant :

- ▷ Le système est hyperbolique,
- ▷ Il admet une entropie convexe, l'énergie. L'inégalité associée s'écrit

$$\partial_t(hu^2/2 + gh^2/2 + ghz) + \partial_x((hu^2/2 + gh^2 + ghz)u) \leq 0. \quad (2)$$

- ▷ La masse totale est conservée

$$\frac{d}{dt} \int h dx = 0, \quad (3)$$

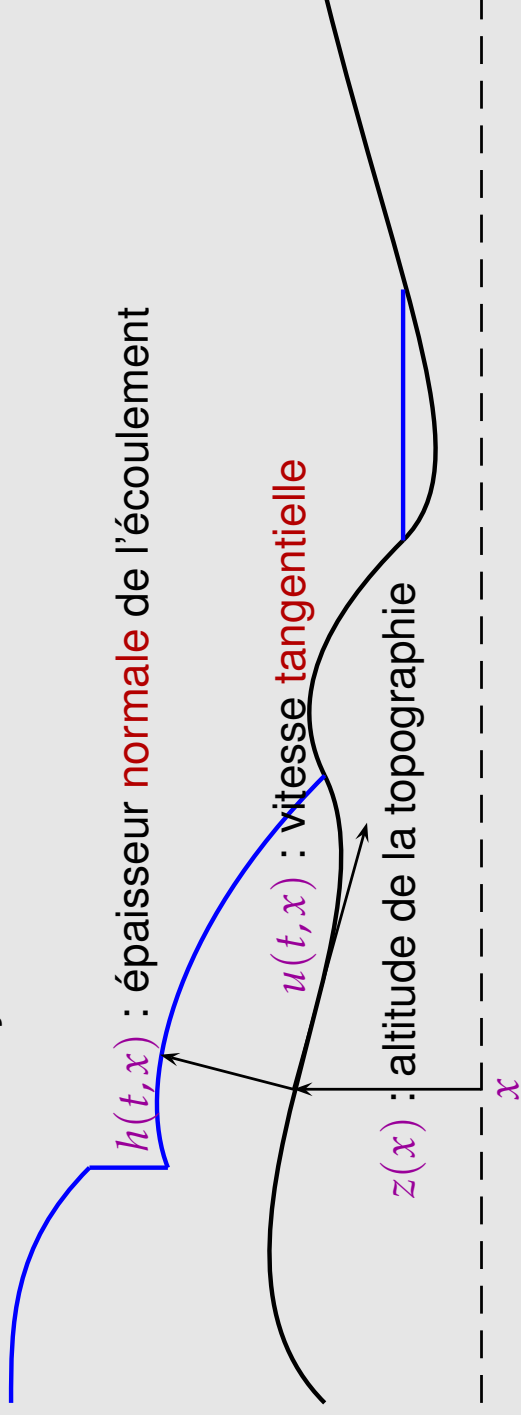
- ▷ l'épaisseur  $h$  reste positive ou nulle, et le cas "à sec"  $h = 0$  est bien rendu par les équations,
- ▷ Les équilibres au repos

$$u \equiv 0, \quad h(x) + z(x) = cste \quad (4)$$

sont des solutions stationnaires du système.

# Le modèle de Savage et Hutter pour les écoulements sur pente

La coordonnée  $x$  est toujours mesurée horizontalement.



Les équations sont

$$\begin{cases} \partial_t \left( \frac{h}{\cos \theta} \right) + \partial_x (hu) = 0, \\ \partial_t \left( \frac{hu}{\cos \theta} \right) + \partial_x \left( hu^2 + g \frac{h^2}{2} \cos \theta \right) + gz_x \left( h - \frac{h^2}{2} \cos \theta \theta_x \right) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

où  $\theta(x)$  est l'angle entre l'horizontale et la tangente à la topographie,

$$\tan \theta = z_x, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2. \quad (6)$$

Hypothèse essentielle en plus de couche mince : **pente à faible variation** (courbure petite)  $\theta_x \ll 1/L$ . Bon modèle pour les pentes presque constantes.



## Le modèle de Savage et Hutter : propriétés

Propriétés du modèle de Savage et Hutter :

- ▷ Le système est hyperbolique,
- ▷ Il admet une entropie convexe, l'énergie. L'inégalité associée s'écrit

$$\partial_t \left( \frac{hu^2/2 + g\frac{h^2}{2} \cos\theta + ghz}{\cos\theta} \right) + \partial_x \left( (hu^2/2 + gh^2 \cos\theta + ghz)u \right) \leq 0. \quad (7)$$

- ▷ La masse totale est conservée

$$\frac{d}{dt} \int \frac{h}{\cos\theta} dx = 0, \quad (8)$$

- ▷ l'épaisseur  $h$  reste positive ou nulle, et le cas "à sec"  $h = 0$  est bien rendu par les équations,
- ▷ Les équilibres au repos

$$u \equiv 0, \quad h(x) \cos\theta(x) + z(x) = cste \quad (9)$$

sont des solutions stationnaires du système.

## Le modèle de Savage et Hutter : propriétés

Identités algébriques :

- ▷ En combinant les deux équations on trouve pour les solutions régulières

$$\partial_t \frac{u}{\cos \theta} + \partial_x \left( u^2 / 2 + hg \cos \theta + gz \right) = 0. \quad (10)$$

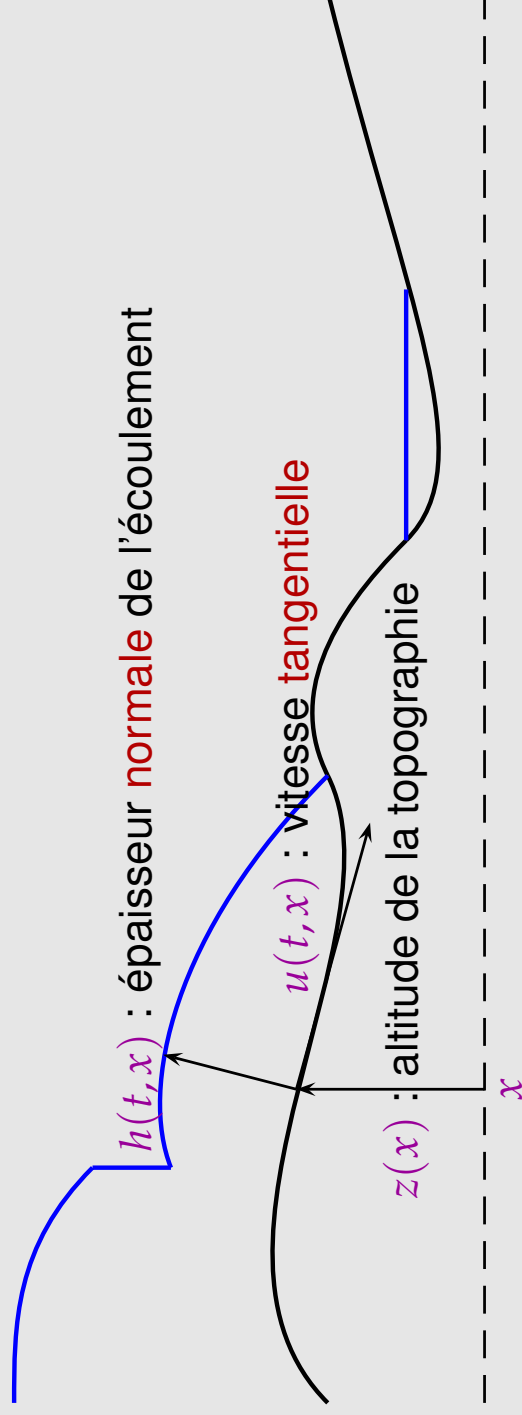
- ▷ On en déduit immédiatement avec l'équation de masse que  $u = 0$  et  $h \cos \theta + z = cst$  est une solution stationnaire.
- ▷ D'autre part, multipliant l'équation de masse par  $u^2 / 2 + hg \cos \theta + gz$  et (10) par  $hu$  on trouve l'inégalité d'entropie.

$$\partial_t \left( \frac{hu^2 / 2 + g \frac{h^2}{2} \cos \theta + ghz}{\cos \theta} \right) + \partial_x \left( (hu^2 / 2 + gh^2 \cos \theta + ghz)u \right) \leq 0. \quad (11)$$

- ▷ Le modèle (5) est en fait légèrement différent de celui introduit par Savage et Hutter, il inclut en plus le terme en  $\cos \theta \theta_x h^2 / 2$ . Notons que  $\cos \theta \theta_x$  est la courbure de la topographie. C'est ce (petit) terme qui permet d'avoir l'inégalité d'entropie et les solutions stationnaires au repos.

## Le modèle de Bouchut, Mangeney, Perthame, Vilotte

Mêmes notations géométriques, mais la courbure n'est pas petite.



Les équations sont (sous forme non conservative)

$$\begin{cases} \partial_t \frac{h - \frac{h^2 \theta_X}{\cos \theta}}{\cos \theta} + \partial_x \left( \frac{\ln(1 - h\theta_X)}{-\theta_X} u \right) = 0, \\ \partial_t \frac{u}{\cos \theta} + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \frac{1}{(1 - h\theta_X)^2} + hg \cos \theta + gz \right) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

où  $\tan \theta = z_x$ , et  $\theta_X = \cos \theta \theta_x$ . Pas d'autre hypothèse que celle de couche mince.

## Le modèle de BMPV : propriétés

Propriétés du modèle :

- ▷ Le système est hyperbolique,
- ▷ Il admet une entropie convexe, l'énergie.
- ▷ La masse totale est conservée

$$\frac{d}{dt} \int \frac{h - \frac{h^2}{2} \theta_X}{\cos \theta} dx = 0, \quad (13)$$

- ▷ l'épaisseur  $h$  reste positive ou nulle, et le cas "à sec"  $h = 0$  est bien rendu par les équations,
- ▷ Les équilibres au repos

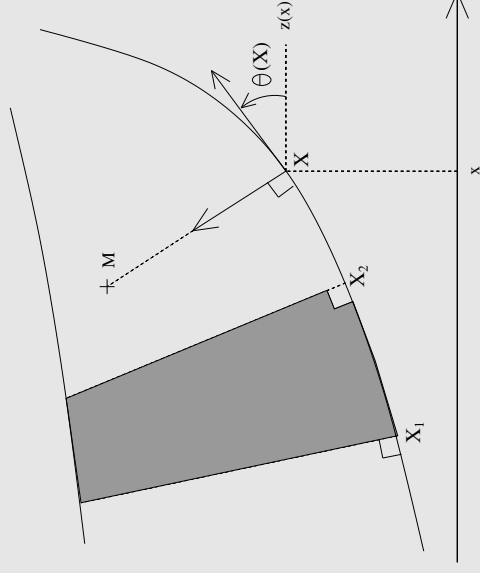
$$u \equiv 0, \quad h(x) \cos \theta(x) + z(x) = cste \quad (14)$$

sont des solutions stationnaires du système.

- ▷ la densité de masse  $h - \frac{h^2}{2} \theta_X$  ne reste pas nécessairement positive. Cela est dû à l'impossibilité géométrique de définir  $h$  (solution multivaluée).

## Dérivation des modèles : coordonnées

- ▷ On définit l'abscisse curviligne  $X(x)$  sur la topographie par  $dX = dx / \cos\theta$ . Ceci définit un changement de variable, et on a
 
$$\cos\theta dX = dx, \quad \partial_X = \cos\theta \partial_x. \quad (15)$$
 Les modèles peuvent alors se réécrire en variable  $t, X$ , car une équation  $\partial_t(A / \cos\theta) + \partial_x B = 0$  devient  $\partial_t A + \partial_X B = 0$ .
- ▷ On a  $\tan\theta = z_x$ , et il faut supposer  $z(x)$  assez régulier.
- ▷ On définit pour chaque temps  $t$  le domaine  $\Omega_t$  du plan occupé par le volume de fluide. Il est délimité par le fond et la surface libre. Un point  $M$  dans  $\Omega_t$  peut être repéré par sa projection orthogonale sur le fond (donc par  $X$  ou  $x$ ), et par sa distance au fond  $Z, 0 < Z < h(t, X)$ .



## Dérivation des modèles : coordonnées

▷ On a

$$M = (x, z(x)) + Z(-\sin\theta(x), \cos\theta(x)), \quad (16)$$

et donc

$$\nabla_{X,Z}M = \begin{pmatrix} J \cos\theta & -\sin\theta \\ J \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad J = 1 - Z\theta_X = \det\nabla_{X,Z}M. \quad (17)$$

▷ On suppose que  $(X, Z) \mapsto M$  est un difféomorphisme ( $J > 0$ ), ce qui caractérise l'admissibilité du système de coordonnées.

▷ Le volume de fluide compris entre deux abscisses  $X_1$  et  $X_2$  est

$$\int_{X_1 < X < X_2} dM = \int_{X_1}^{X_2} \int_0^{h(t,X)} J dXdZ, \quad (18)$$

donc la densité de fluide par rapport à  $X$  est

$$\int_0^{h(t,X)} J dZ = h - \frac{h^2}{2}\theta_X. \quad (19)$$

## Dérivation des modèles : équations d'Euler

- ▷ On part des équations d'Euler incompressible dans le domaine occupé par le fluide,

$$\partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla_M) \vec{U} + \nabla_M P = -\vec{g}, \quad (20)$$

avec la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div}_M \vec{U} = 0, \quad (21)$$

où  $\vec{U}$  est le champ de vitesse,  $P$  la pression, et  $\vec{g} = (0, g)$ .

- ▷ Les conditions aux limites sont

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{au fond } (Z = 0), \quad (22)$$

$$P = 0 \quad \text{à la surface libre } (Z = h(t, X)), \quad (23)$$

- ▷ Il faut une loi d'évolution de la surface libre (bord supérieur de  $\Omega_t$ ), qui dépend du temps :

*La surface libre est advectée à la vitesse  $\vec{U}$ .*

Cela peut s'écrire

$$\partial_t (\mathbf{1}_{M \in \Omega_t}) + \operatorname{div}_M (\mathbf{1}_{M \in \Omega_t} \vec{U}) = 0 \quad \text{à travers la surface libre.} \quad (24)$$

## Dérivation des modèles : équations d'Euler en référentiel mobile

- ▷ On transforme les équations en variable  $t, X, Z$ , et on représente  $\vec{U}$  par ses composantes dans le repère mobile attaché à la topographie,  $U$  composante tangentielle,  $W$  composante normale. On trouve

$$\begin{cases} \partial_X U + \partial_Z (JW) = 0, \\ \partial_t (JU) + U \partial_X U + JW \partial_Z U + \partial_X P = -Jg \sin \theta + UW \theta_X, \\ \partial_t (JW) + U \partial_X W + JW \partial_Z W + J \partial_Z P = -Jg \cos \theta - U^2 \theta_X. \end{cases} \quad (25)$$

- ▷ Les conditions aux limites sont
- ▷ Pour la surface libre, on écrit que  $\mathbb{1}_{M \in \Omega_t} = \mathbb{1}_{0 < Z < h(t, X)}$  et  $\partial_t J = 0$ , d'où

$$W(t, X, Z = 0) = 0, \quad P(t, X, Z = h(t, X)) = 0. \quad (26)$$

$\partial_t (\mathbb{1}_{Z < h(t, X)} J) + \partial_X (\mathbb{1}_{Z < h(t, X)} U) + \partial_Z (\mathbb{1}_{Z < h(t, X)} JW) = 0$  à travers la surface libre.

Prenant la partie proportionnelle à  $\delta(Z - h(t, X))$ , il vient

$$J \partial_t h + U \partial_X h = JW \quad \text{pour } Z = h(t, X). \quad (27)$$

$$J \partial_t h + U \partial_X h = JW \quad \text{pour } Z = h(t, X). \quad (28)$$

Combinant avec l'intégrale en  $Z$  de  $\partial_t J + \partial_X U + \partial_Z (JW) = 0$ , on trouve

$$\partial_t \int_0^h J dZ + \partial_X \int_0^h U dZ = 0. \quad (29)$$



## Dérivation des modèles : intégration des équations

- ▷ Soit  $\varepsilon$  l'ordre de grandeur de  $h/L$ , où  $L$  est une longueur caractéristique. Les hypothèses sont que  $\varepsilon$  est assez petit, et
  - ▷ Couche mince  $h/L = O(\varepsilon)$ ,
  - ▷ Courbure petite  $\theta_X = O(\varepsilon)$  pour SH,
  - ▷ Pente petite  $\theta = O(\varepsilon)$  pour SV.
- ▷ Les équations s'intègrent comme suit :
  - ▷ L'équation d'incompressibilité et la condition aux limites sur  $W$  définit  $W(t, X, Z)$ ,
  - ▷ l'équation d'accélération normale en  $\partial_t W$  permet de définir  $\partial_Z P$ , et avec la condition aux limites sur  $P$  cela définit  $P(t, X, Z)$ ,
  - ▷ l'équation d'accélération tangentielle en  $\partial_t U$  est l'équation principale, et il faut trouver un profil compatible en  $Z$  de  $U(t, X, Z)$ , en terme d'une fonction  $u(t, X)$ . Cela donne une équation sur  $u(t, X)$ ,
  - ▷ l'équation de surface libre donne l'équation de masse sur  $h(t, X)$ .
- ▷ On néglige les termes en  $\varepsilon^3$  dans les équations sur  $h$  et  $hu$ .

## Dérivation des modèles : hiérarchie

- ▷ Le modèle SH se déduit de BMPV en négligeant les termes en  $\varepsilon^3$ , sachant que  $\theta_X = O(\varepsilon)$ . Le modèle SV se déduit de également de SH.
- ▷ Les inégalités d'énergie peuvent se déduire à  $\varepsilon^3$  près de l'équation d'énergie pour Euler incompressible.
- ▷ La préservation des solutions d'équilibre au repos se déduit à  $\varepsilon^3$  près de la solution triviale  $\vec{U} = 0$  des équations d'Euler avec surface libre horizontale.
- ▷ La propriété d'exactitude pour l'inégalité d'énergie et les équilibres au repos est en surplus, cela n'est pas une conséquence de la méthode de dérivation des équations.
- ▷ Le fait de tirer  $\partial_Z P$  de l'équation d'accélération sur  $W$  est lié au fait qu'on a fait en sorte de négliger l'accélération normale

$$\partial_t(JW) + U\partial_X W + JW\partial_Z W \quad (30)$$

C'est l'**hypothèse hydrostatique**. Elle est cruciale pour pouvoir dériver un modèle de couche mince.

## Dérivation des modèles : le modèle de Savage et Hutter

Pour le modèle SH, les calculs se font comme suit.

- ▷ On suppose  $\partial_Z W$  borné, ce qui donne avec la condition d'annulation sur le fond que  $W = O(\varepsilon)$ , puisque  $0 < Z < h$  et que  $h = O(\varepsilon)$ . Comme  $\theta_X = O(\varepsilon)$ , on a  $J = 1 - Z\theta_X = 1 + O(\varepsilon^2)$ .
- ▷ L'équation sur  $\partial_Z P$  donne  $\partial_Z P = -g \cos \theta + O(\varepsilon)$ , qui s'intègre,  
$$P = (h - Z)g \cos \theta + O(\varepsilon^2). \quad (31)$$
- ▷ Reportant dans l'équation sur  $U$  on trouve  
$$\partial_t U + U \partial_X U + W \partial_Z U + \partial_X ((h - Z)g \cos \theta) = -g \sin \theta + O(\varepsilon^2). \quad (32)$$
- ▷ On cherche un profil de  $U(t, X, Z)$  indépendant de  $Z$ ,  
$$U(t, X, Z) = u(t, X) + O(\varepsilon^2), \quad (33)$$
et tenant compte de  $Z = O(\varepsilon)$  et  $\theta_X = O(\varepsilon)$ , on obtient  
$$\partial_t u + \partial_X (u^2 / 2 + hg \cos \theta) = -g \sin \theta + O(\varepsilon^2). \quad (34)$$
- ▷ Comme  $\sin \theta = \partial_X z$ , c'est bien l'équation désirée (10), à  $O(\varepsilon^2)$  près.
- ▷ L'équation de surface libre (29) donne l'équation de masse  
$$\partial_t h + \partial_X (hu) = O(\varepsilon^3). \quad (35)$$

## Dérivation des modèles : commentaires

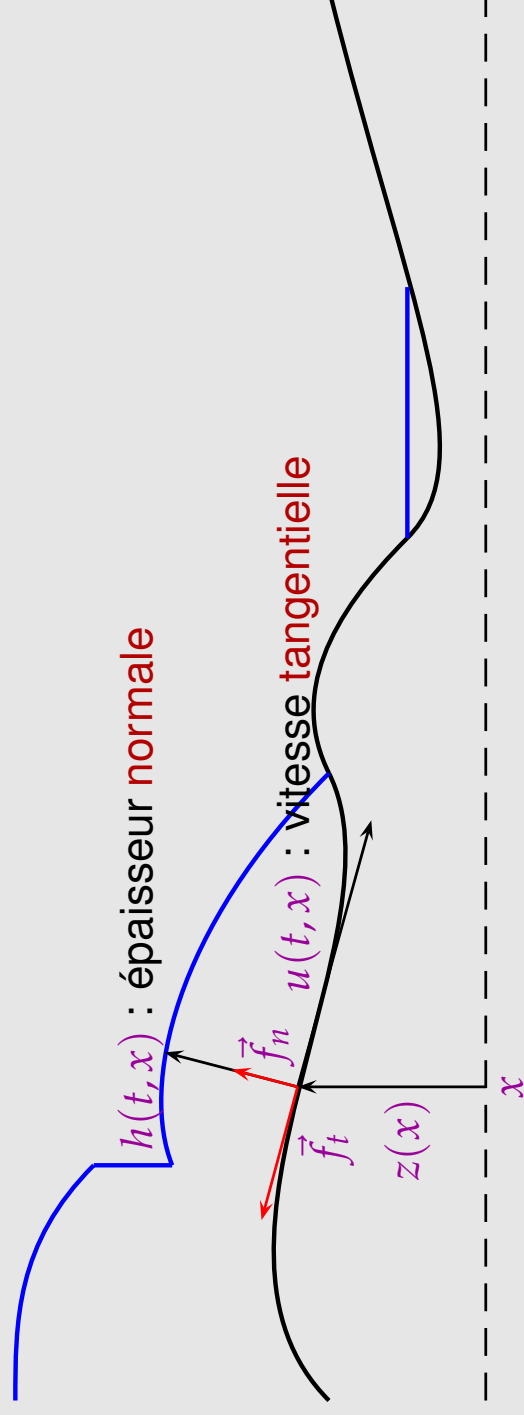
- ▷ Pour le modèle BMPV, le profil de  $U$  qui permet de résoudre le problème n'est pas constant en  $Z$ , mais de la forme

$$U(t, X, Z) = \frac{u(t, X)}{1 - Z\theta_X}. \quad (36)$$

- ▷ Le modèle BMPV apparaît trop compliqué en pratique. De plus il n'est valide que sous la condition  $1 - h\theta_X > 0$ , qui n'est a priori pas préservée par les équations. On lui préfère donc le modèle SH, sous la forme présentée ici (avec le terme correcteur en  $\theta_X h^2 / 2$ ).
- ▷ On peut vérifier que pour le modèle BMPV, le profil (36) donne en fait une solution exacte des équations d'Euler hydrostatique avec surface libre, où on a seulement négligé l'accélération normale (et rien d'autre). On a la même propriété pour le modèle SH avec le profil constant si on fait l'hypothèse de pente constante,  $\theta_X = 0$ . Ceci explique que les modèles peuvent avoir une certaine validité même sans l'hypothèse de couche mince.

## Modélisation de la friction

- ▷ Force de friction des grains avec le fond, ou des grains entre eux.
- ▷ Pour les avalanches : **friction de Coulomb**



Deux forces en jeu : la force de **friction tangentielle**  $\vec{f}_t$ , qui s'oppose à la vitesse, et la force de **réaction normale**  $\vec{f}_n$ . La force de réaction  $\vec{f}_n$  est telle que la couche de fluide glisse sans pénétrer la topographie. La force de friction tangentielle doit vérifier les **conditions de Coulomb**

$$|\vec{f}_t| \leq \mu |\vec{f}_n|, \quad |\vec{f}_t| = \mu |\vec{f}_n| \text{ si la vitesse est non nulle,} \quad (37)$$

où  $\mu = \mu(h, u) \geq 0$  dépend du matériau.

## Le modèle de Savage et Hutter avec friction de Coulomb

- ▷ Le modèle de Savage et Hutter avec friction de Coulomb s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \left( \frac{h}{\cos \theta} \right) + \partial_x (hu) = 0, \\ \partial_t \left( \frac{hu}{\cos \theta} \right) + \partial_x (hu^2 + g \frac{h^2}{2} \cos \theta) + g z_x \left( h - \frac{h^2}{2} \cos \theta \theta_x \right) \\ = -\mu g h (\operatorname{sgn} u) \left( 1 + \frac{u^2 \theta_x}{g \cos \theta} \right)_+ \end{cases}, \quad (38)$$

- ▷ La partie positive impose la condition que la friction est **dissipative**. Notons que si la courbure  $\theta_x$  est positive, la partie positive n'agit pas, alors que si  $\theta_x < 0$  et si  $|u|$  est assez grand on trouve zéro (cela correspond au décollement du fluide de la topographie).
- ▷ Le terme  $\operatorname{sgn} u$  est **multivalué** lorsque  $u = 0$ . Notant  $\operatorname{sgn} u = f(t, x)$ , cela signifie que
 
$$|f(t, x)| \leq 1, \quad f(t, x) = \operatorname{sgn} u(t, x) \quad \text{si } u(t, x) \neq 0. \quad (39)$$

## Le modèle de Savage et Hutter avec friction de Coulomb

- ▷ L'équation associée à  $u$  est (pour les solutions régulières)

$$\partial_t \frac{u}{\cos \theta} + \partial_x \left( u^2 / 2 + hg \cos \theta + gz \right) = -\mu g (\operatorname{sgn} u) \left( 1 + \frac{u^2 \theta_x}{g \cos \theta} \right). \quad (40)$$

- ▷ Les équilibres au repos (solutions stationnaires avec  $u = 0$ ) sont caractérisées par

$$\partial_x (hg \cos \theta + gz) = -\mu g (\operatorname{sgn} u). \quad (41)$$

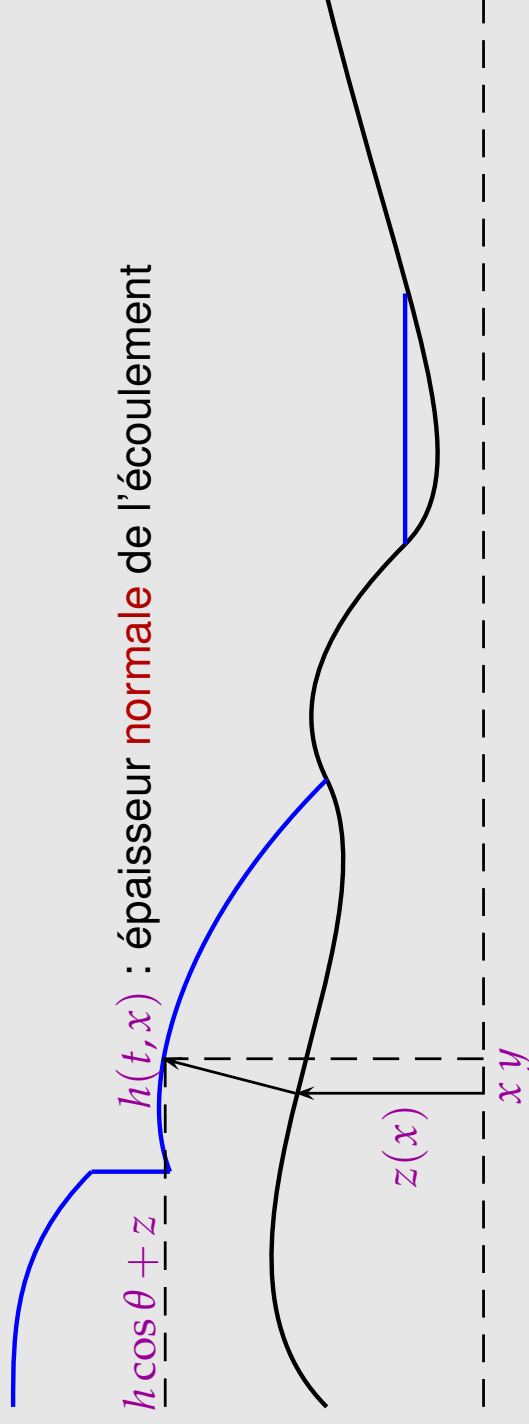
Mais comme  $\operatorname{sgn} u$  est n'importe quelle fonction entre  $-1$  et  $1$ , cela se simplifie en

$$|\partial_x (h \cos \theta + z)| \leq \mu. \quad (42)$$

- ▷ Si  $\mu = 0$  on retrouve la condition  $h \cos \theta + z = \text{cste}$ . Sinon, la condition (42) signifie que la pente de la surface libre n'est pas trop grande.

# Le modèle de Savage et Hutter avec friction de Coulomb

Commentaires sur les équilibres au repos



- ▷ La condition pour que la surface libre ait une pente au plus  $\mu$  serait  $|\partial_y (h \cos \theta + z)| \leq \mu$ . (43)
- ▷ Comme  $y = x - h \sin \theta$ , on a  $dy/dx = 1 - \partial_x (h \sin \theta)$ , et cette relation diffère de l'équation des équilibres au repos du modèle,  $|\partial_x (h \cos \theta + z)| \leq \mu$ . (44)
- ▷ Ceci est un défaut du modèle SH avec friction. Il est dû à la dérivation non complètement comprise de la friction à partir d'un système de Navier-Stokes incompressible.
- ▷ Ce problème n'arrive pas pour Saint Venant avec friction.



# Le modèle de Savage et Hutter avec friction de Coulomb

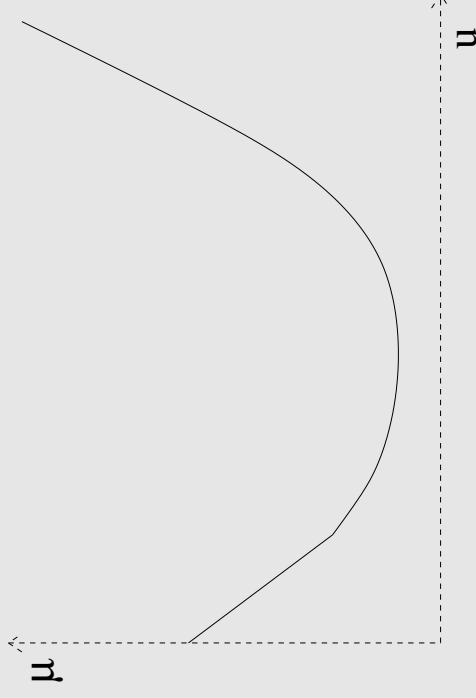
Commentaires sur les équilibres au repos

- ▷ Les équilibres au repos, caractérisés par

$$u = 0, \quad |\partial_x (h \cos \theta + z)| \leq \mu. \quad (45)$$

sont très nombreux ! Pour quasiment tous les problèmes de Cauchy, on converge en temps fini vers un tel équilibre au repos.

- ▷ La loi de friction  $\mu = \mu(h, u)$ , dépendant du matériau, est très difficile à déterminer. Pouliquen et Forterre donnent une dépendance en  $u$  à  $h$  fixé, de la forme



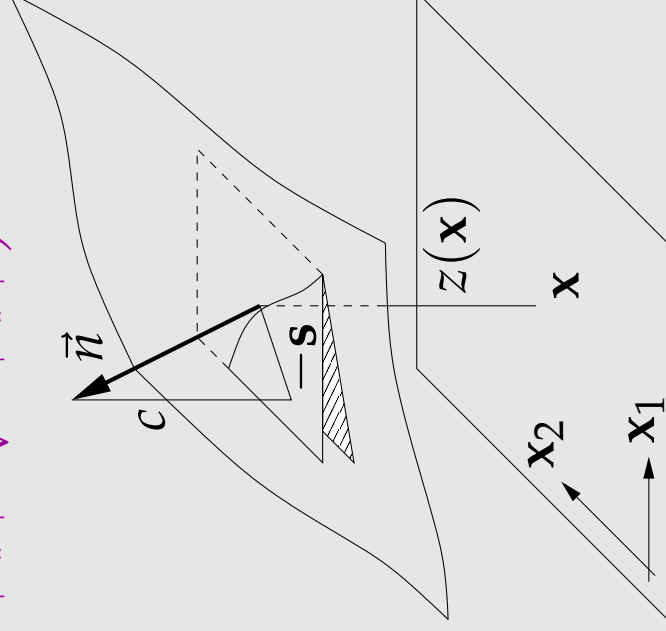
En particulier, il y a une partie pour  $u$  petit pour laquelle  $d\mu/du < 0$ . Elle donne lieu à des équilibres au repos **instables**, avec des phénomènes d'**hystérésis**.

## Les modèles de Bouchut et Westdickenberg en deux dimensions

**Contexte** : écoulement sur une topographie bidimensionnelle  $z(x)$ , où  $x \in \mathbb{R}^2$  est la coordonnée horizontale. Les inconnues sont  $h(t, x)$ , épaisseur normale de l'écoulement,  $u(t, x) \in \mathbb{R}^2$  vitesse de l'écoulement. Le matériau occupe un volume de  $\mathbb{R}^3$  au dessus du graphe de  $z$ .

▷ Description de la géométrie : on note  $\vec{n} = (-\mathbf{s}, c)$  la normale unitaire à la topographie,

$$\vec{n} = \left( -\frac{\nabla_{xz}}{\sqrt{1+|\nabla_{xz}|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_{xz}|^2}} \right) \equiv (-\mathbf{s}, c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}. \quad (46)$$



## Les modèles de Bouchut et Westdickenberg en deux dimensions

- ▷ Le scalaire  $c > 0$  est le cosinus de l'angle entre  $\vec{n}$  et la verticale. On a  $\mathbf{s}^2 + c^2 = 1$ ,  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{c}$  remplacent  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$  en 1d.
- ▷ La courbure est un tenseur symétrique  $2 \times 2$  donné par  $\mathcal{H} = c^3 \partial_{xx}^2 z$ .
- ▷ La vitesse physique 3d s'écrit par ses composantes horizontales et verticales

$$\mathcal{V}^{tg} = (cu, \mathbf{s}^t u) \in \mathbb{R}^3, \quad (47)$$

- qui vérifie  $\mathcal{V}^{tg} \cdot \vec{n} = 0$ . Autrement dit,  $u \in \mathbb{R}^2$  paramétrise les vitesses tangentielles  $\mathcal{V}^{tg}$ .
- ▷ On a les modèles de Saint Venant (pour pente faible), Savage et Hutter généralisé (pour courbure petite), et l'analogue de BMPV (sans condition sur la topographie). Pour chacun on a des propriétés similaires au cas 1d.

## Le modèle SH généralisé en deux dimensions

- ▷ Le modèle SH2d avec friction s'écrit (sous forme non conservative)

$$\partial_t(h/c) + \nabla_x \cdot (hu) = 0, \quad (48)$$

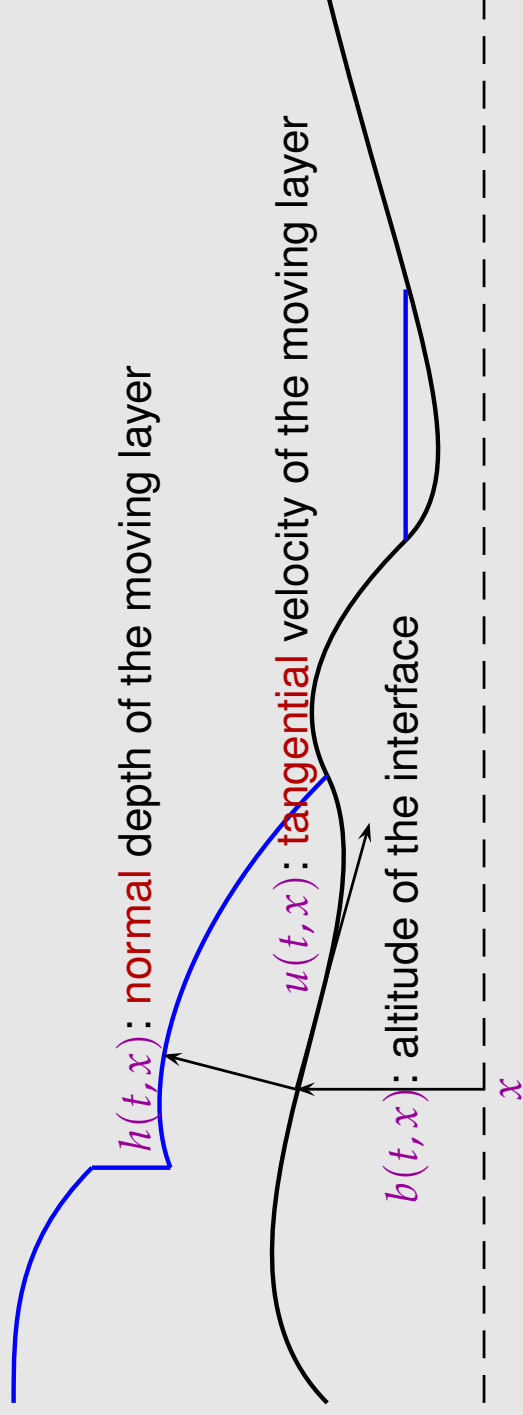
$$\begin{aligned} & \partial_t u + cu \cdot \nabla_x u + \frac{1}{c}(I - \mathbf{s}\mathbf{s}^t) \nabla_x (g(hc + z)) \\ &= -\frac{1}{c}(u^t \mathcal{H}u) \mathbf{s} + \frac{1}{c}(\mathbf{s}^t \mathcal{H}u)u - \frac{g\mu c u}{\sqrt{c^2|u|^2 + (\mathbf{s} \cdot u)^2}} \left(1 + \frac{u^t \mathcal{H}u}{gc}\right) + \end{aligned} \quad (49)$$

- ▷ Une nouveauté par rapport au 1d est la présence des termes de courbure  $-\frac{1}{c}(u^t \mathcal{H}u) \mathbf{s} + \frac{1}{c}(\mathbf{s}^t \mathcal{H}u)u$ .
- ▷ Les équilibres au repos sont donnés par
 
$$u = 0, \quad \left(\nabla_x(hc + z)^t\right)(I - \mathbf{s}\mathbf{s}^t) \nabla_x(hc + z) \leq \mu^2 c^2. \quad (50)$$

- ▷ Le système est invariant par rotation horizontale.
- ▷ Pour le cas sans friction, on a le transport du tourbillon le long des caractéristiques associées à  $u$  (il faut écrire les équations sous une forme très particulière pour le voir...).

## Two layer flow

The coordinate  $x$  is still measured horizontally.



Now the angle between the horizontal and the tangent to the interface is  $\theta(t, x)$ , with

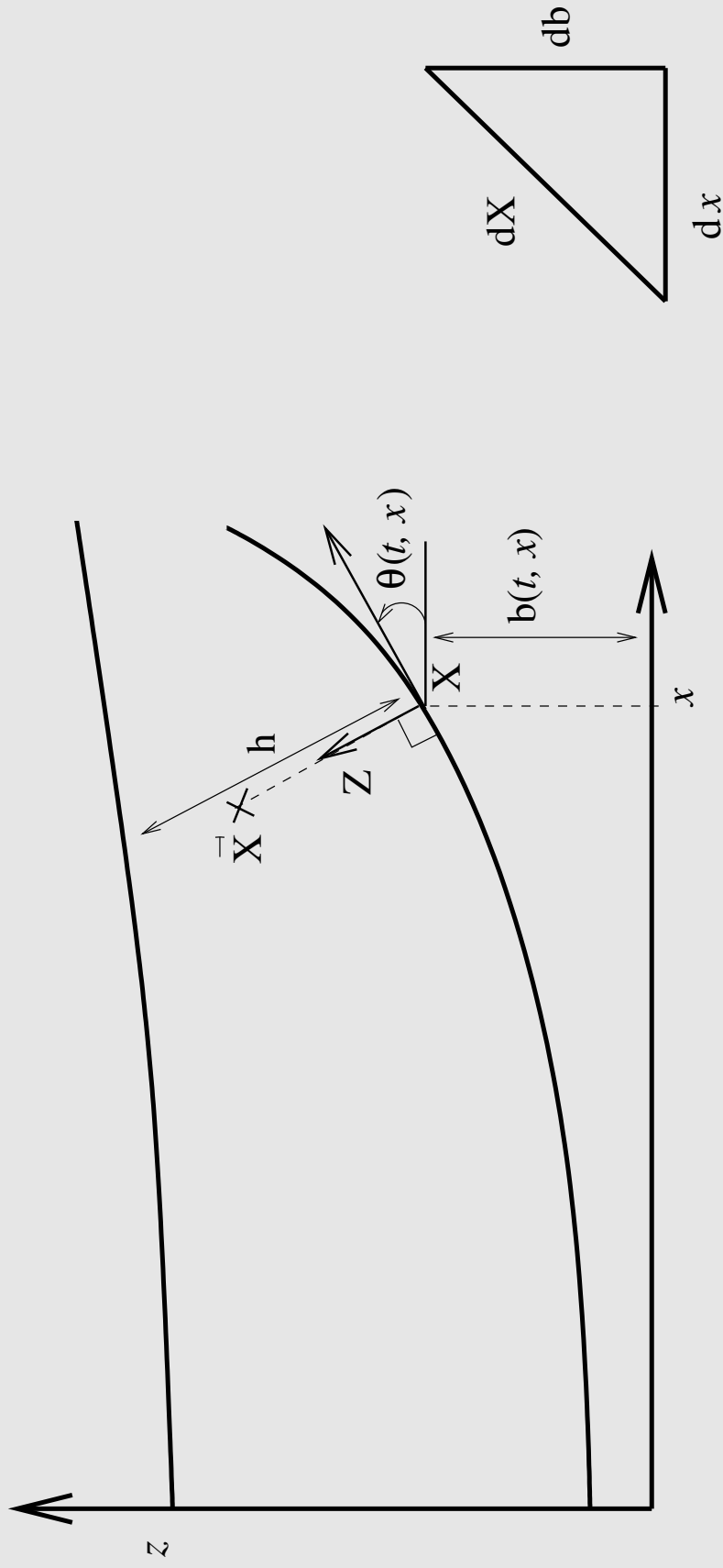
$$\tan \theta = \partial_x b, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2. \quad (51)$$

We have the relation

$$\partial_t \theta = \cos^2 \theta \partial_{tx}^2 b. \quad (52)$$

## Two layer flow: geometry

Consider  $\vec{X}$  an arbitrary point in the domain of moving fluid. We consider the coordinate  $Z$  that measures the position of  $\vec{X}$  in the direction normal to the interface.



Thus

$$0 < Z < h(t, x). \quad (53)$$

## Two layer flow: Euler equations

- ▷ The interface  $b(t, x)$  is assumed to be known,
- ▷ The incompressible Euler equations for the moving layer can be written in Cartesian coordinates  $(t, \vec{X})$  as

$$\nabla_{\vec{X}} \cdot \vec{U} = 0, \quad (54)$$

$$\hat{\partial}_t \vec{U} + \vec{U} \cdot \nabla_{\vec{X}} \vec{U} + \nabla_{\vec{X}} P = -\nabla_{\vec{X}} (\vec{g} \cdot \vec{X}), \quad (55)$$

where  $\hat{\partial}_t = \partial_t|_{\vec{X}}$ ,  $\vec{g} = (0, g)$  and  $g$  is the gravity constant. By  $P$  we denote the pressure divided by density.

- ▷ This system is completed with a kinematic law for the evolving free surface,  
*the free surface is advected by the material velocity  $\vec{U}$ ,* (56)  
and with dynamic boundary conditions. At the free surface we just set  
 $P = 0$  at  $Z = h(t, x)$ . (57)
- ▷ Boundary conditions at the interface need to be set.

## Euler equations: interface boundary conditions

We assume that

- ▷ the moving fluid has density  $\rho_m$
- ▷ the fluid at rest has density  $\rho_r > \rho_m$

Then we just write the conservation of mass

$$\widehat{\partial}_t \rho + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad \text{through the interface,} \quad (58)$$

where  $\rho$  takes the value  $\rho_m$  in the moving part of the fluid, and  $\rho_r$  in the part at rest. The velocity  $\vec{U}$  is set to  $0$  in the part at rest. This gives the interface condition

$$\rho_m \vec{U} \cdot \vec{n} = -(\rho_r - \rho_m) \cos \theta \partial_t b \quad \text{at } Z = 0^+, \quad (59)$$

where  $\vec{n} = (-\sin \theta, \cos \theta)$  is the normal to the interface.



## Euler equations: new coordinates

Setting

$$\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \vec{U}, \quad (60)$$

we rewrite the system in the variables  $t, x, Z$ , with  $J = 1 - Z \cos \theta \partial_x \theta$ ,

$$\partial_x U + \partial_Z \left( \frac{JW}{\cos \theta} \right) = 0, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{J}{\cos \theta} \partial_t U + (Z \cos^2 \theta \partial_{tx}^2 b - \sin \theta \partial_{tb} + U) \partial_x U + J \left( \frac{W}{\cos \theta} - \partial_{tb} \right) \partial_Z U \\ + \partial_x \left( g(b + Z \cos \theta) + P \right) = W \left( \partial_x (\cos \theta \partial_{tb}) + U \partial_{x\theta} \right), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{J}{\cos \theta} \partial_t W + (Z \cos^2 \theta \partial_{tx}^2 b - \sin \theta \partial_{tb} + U) \partial_x W + J \left( \frac{W}{\cos \theta} - \partial_{tb} \right) \partial_Z W \\ + \frac{J}{\cos \theta} \partial_Z \left( g(b + Z \cos \theta) + P \right) = -U \left( \partial_x (\cos \theta \partial_{tb}) + U \partial_{x\theta} \right). \end{aligned} \quad (63)$$

## New coordinates: kinematic boundary condition

- ▷ The kinematic boundary condition at the free surface can be written in the new coordinates, and is equivalent to the conservation of mass

$$\partial_t \left( \frac{h}{\cos\theta} - \frac{h^2}{2} \partial_x \theta \right) + \partial_x \left( \frac{h^2}{2} \cos^2 \theta \partial_{tx}^2 b - h \sin \theta \partial_t b + h \bar{U} \right) = - \frac{\rho_r}{\rho_m} \partial_t b, \quad (64)$$

where

$$\bar{U} = \frac{1}{h} \int_0^h U dz. \quad (65)$$

- ▷ Similarly, the energy conservation equation

$$\hat{\partial}_t \left( \frac{|\vec{U}|^2}{2} + \vec{g} \cdot \vec{X} \right) + \nabla_{\vec{X}} \cdot \left( \frac{|\vec{U}|^2}{2} \vec{U} + P \vec{U} + (\vec{g} \cdot \vec{X}) \vec{U} \right) = 0 \quad (66)$$

can be transformed into coordinates  $t, x, Z$ . Once integrated in  $Z$  it yields

$$\begin{aligned} & \partial_t \left\{ \int_0^h \frac{J}{\cos\theta} \left( \frac{U^2 + W^2}{2} + g(b + Z \cos\theta) \right) dz + \frac{\rho_r}{\rho_m} g \frac{b^2}{2} \right\} \\ & + \partial_x \left\{ \int_0^h \left( (Z \cos^2 \theta \partial_{tx}^2 b - \sin \theta \partial_t b + U) \left( \frac{U^2 + W^2}{2} + g(b + Z \cos\theta) \right) + P U \right) dz \right\} \\ & = - \left( \frac{1}{2} U_{Z=0}^2 + \frac{1}{2} W_{Z=0}^2 \right) \frac{\rho_r}{\rho_m} \partial_t b - \left( \frac{\rho_r}{\rho_m} - 1 \right) P_{Z=0} \partial_t b. \end{aligned} \quad (67)$$

## The model

$$\partial_t \left( \frac{h}{\cos \theta} - \frac{h^2}{2} \partial_x \theta \right) + \partial_x \left( \frac{h^2}{2} \cos^2 \theta \partial_{tx}^2 b - h \sin \theta \partial_t b + hu \right) = - \frac{\rho_r}{\rho_m} \partial_t b, \quad (68)$$

$$\left( \frac{1}{\cos \theta} - \frac{h}{2} \partial_x \theta \right) \partial_t u + \left( \frac{h}{2} \cos^2 \theta \partial_{tx}^2 b - \sin \theta \partial_t b \right) \partial_x u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} + gh \cos \theta + gb \right) = 0. \quad (69)$$

**Theorem** System (68)-(69) has the following properties.

(i) Under assumptions

$$h = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \partial_x \theta = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \partial_t b = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (70)$$

it provides in the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  an approximation up to error terms of order  $\varepsilon^3$  in (68) and of order  $\varepsilon^2$  in (69), with constant velocity profile in the normal variable, to the free surface incompressible Euler equations,

(ii) For constant slope ( $\partial_t \theta = 0$ ,  $\partial_x \theta = 0$ ), system (68)-(69) gives an exact solution to the free surface incompressible Euler system with hydrostatic assumption,

## The model: properties

(iii) It admits an energy dissipation inequality

$$\begin{aligned} & \partial_t \left( \left( \frac{h}{\cos \theta} - \frac{h^2}{2} \partial_x \theta \right) \left( \frac{u^2}{2} + gb \right) + g \frac{h^2 + \frac{\rho_r}{\rho_m} b^2}{2} - g \frac{h^3}{3} \cos \theta \partial_x \theta \right) \\ & + \partial_x \left( \left( \frac{u^2}{2} + gh \cos \theta + gb \right) hu + \left( \frac{h^2}{2} \cos^2 \theta \partial_{tx}^2 b - h \sin \theta \partial_t b \right) \left( \frac{u^2}{2} + gb \right) \right) \\ & + g \frac{h^3}{3} \cos^3 \theta \partial_{tx}^2 b - g \frac{h^2}{2} \sin \theta \cos \theta \partial_t b \leq - \frac{u^2}{2} \frac{\rho_r}{\rho_m} \partial_t b - \left( \frac{\rho_r}{\rho_m} - 1 \right) gh \cos \theta \partial_t b, \end{aligned} \quad (71)$$

(iv) It has the lake-at-rest solution  $u = 0$ ,  $h \cos \theta + b = \text{Cst}$ , for arbitrary given  $b(t, x)$  if  $\rho_m = \rho_r$ , or for  $b$  satisfying  $\partial_t b \equiv 0$  if  $\rho_m \neq \rho_r$ .

## Equation on $b$ ?

1. A leading idea in order to find an equation on  $b$  is to ask that a principle of conservation of total energy holds.
2. Looking at equation (71), we have in the right-hand side the leading term

$$-\frac{u^2}{2} \frac{\rho_r}{\rho_m} \partial_t b, \quad (72)$$

while the other is lower order. It can be interpreted as

- ▷ if  $\partial_t b > 0$ , the interface is moving up, and particles that were above go below, i.e. they stop. Thus their kinetic energy is lost, which corresponds to the dissipation of energy,
- ▷ if  $\partial_t b < 0$ , the interface is moving down, and some particles that were at rest start moving. In order to do so, they need some kinetic energy, which corresponds to the need of an external energy.
- ▷ Thus we see the need of another type of energy to compensate with the kinetic energy exchange.

3. The same problem occurs without any assumptions on the profile, in the energy equation (67) with the right-hand side

$$-\left( \frac{1}{2} U_{Z=0}^2 + \frac{1}{2} W_{Z=0}^2 \right) \frac{\rho_r}{\rho_m} \partial_t b. \quad (73)$$

## Conclusion

- ▷ We have developed a two-layer model of fluid/solid transition for a single fluid involving a moving part over a part at rest, with two different densities,
- ▷ It is derived from a precise analysis from incompressible Euler equations with isotropic stress,
- ▷ The interface  $b(t, x)$  is supposed given and we hoped to derive an equation on it by an energy conservation principle. However we did not succeed, probably because some other processes involving energy transfer are missing in the model.